C160

DEA de Physique Théorique

12 mai 1977

T. D. de Mécanique Quantique

I - On se propose d'étudier un problème de diffusion exactement soluble : la diffusion par un potentiel séparable

$V = \lambda|\xi > < \xi|$ où $|\xi >$ est un état normalisé défini par sa fonction d'onde $\xi(\vec{p})$. On pose $H = H_0 + V$

$$G(Z) = \frac{1}{Z - H} \quad , \qquad T(Z) = V + V\, G(Z)\, V$$

1°) Calculer T(Z) en fonction de $|\xi >$

2°) Etudier la convergence de la série de Born de T(Z)

3°) Etudier les états liés de l'hamiltonien $H_0 + V$

4°) Si $\xi(\vec{p})$ est à symétrie sphérique, trouver les déphasages des ondes partielles.

II - Pour décrire la diffusion d'une particule de vitesse v, par un potentiel de portée R, on forme un paquet d'onde à l'aide des fonctions $v_k^{(diff)}(\vec{r})$. Trouver la position $\vec{r}(t)$ de la particule à l'instant $t(t \to \pm\infty)$ sans négliger la phase ϕ de $f(\vec{k}',\vec{k})$. Ecrire que la particule ne peut quitter la cible avant de l'atteindre et en déduire une borne de $\frac{d\phi}{dk}$.

(utilise le formalisme général (en particulier la matrice T))

C160

Potentiel séparable

Soit le potentiel $V = \lambda |\zeta\rangle\langle\zeta|$ où $|\zeta\rangle$ est un état normalisé défini par sa fonction d'onde $\zeta(\vec{p})$

1°) Montrer $T(z) = \dfrac{\lambda |\zeta\rangle\langle\zeta|}{1 - \lambda \Delta(z)}$

où $\Delta(z) = \langle\zeta | G^0(z) | \zeta\rangle = \int d^3p \dfrac{|\zeta(p)|^2}{z - E_p}$

2°) Etudier la convergence de la série de Born de $T(z)$

3°) Etudier les états liés de l'hamiltonien $H_0 + V$

4°) Si $\zeta(\vec{p})$ est à symétrie sphérique trouver les amplitudes des ondes partielles.

avec $\alpha^+(E) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \alpha(E+i\varepsilon)$

$$f(\theta) = -\frac{1}{4\pi}\frac{2m}{\hbar^2}\langle \phi_{k'} | T^+ | \phi_k \rangle = -\frac{1}{4\pi}\frac{2m}{\hbar^2}\alpha^+ |\langle \zeta | \phi_k \rangle|^2$$

car $|k| = |k'|$

$$\langle \zeta | \phi_k \rangle = \sum_{\substack{l=0\\m}}^{\infty} i^l \, 4\pi \int_0^\infty r^2 dr\, \zeta(r)\, j_l(kr) \underbrace{\int d\Omega_r\, Y_l^m(\Omega_k) Y_l^m(\Omega_r)}_{\frac{1}{4\pi}\delta_{l0}\delta_{m0}}$$

$$= \int_0^\infty r^2 dr\, \zeta(r)\, j_0(kr)$$

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik}\sum_l (2l+1) P_l(\cos\theta)\left(e^{2i\delta_l} - 1\right)$$

$$e^{2i\delta_0} - 1 = 2ik\left(-\frac{1}{4\pi}\right)\frac{2m}{\hbar^2}\alpha^+ \Big|\underbrace{\langle \zeta | \phi_k \rangle}_{}\Big|^2 \qquad |\zeta(k)|^2$$

$\delta_l = 0$ si $l \neq 0$

$$H = \sum |\psi_i\rangle E_i \langle \psi_i| + \int d^3k\, |\psi_k\rangle E_k \langle \psi_k|$$

G pole en E_i de résidu $|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$

$$e^{2i\delta_0} = 1 - \frac{ikm}{\pi}\frac{\lambda|\zeta(k)|^2}{1 - \frac{2m\lambda}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3k'\, |\zeta(k')|^2}{k^2 - k'^2 + i\varepsilon}} = 1 - \frac{ikm}{\pi}\frac{\lambda|\zeta(k)|^2}{1 - \frac{4\pi m\lambda}{(2\pi)^3}\underbrace{\int \frac{k'd(k'^2)\,|\zeta(k')|^2}{k^2 - k'^2 + i\varepsilon}}_{\int k'd(k'^2)\frac{\mathcal{P}|\zeta(k')|^2}{k^2-k'^2} - i\pi|\zeta(k)|^2 k}}$$

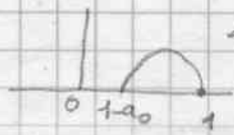
$$= 1 - \frac{\overbrace{i\frac{km}{\pi}\lambda|\zeta(k)|^2}^{2ib}}{1 + \underbrace{\frac{ikm\lambda}{2\pi}|\zeta(k)|^2}_{ib} - \underbrace{\frac{m\lambda}{2\pi^2}\int \frac{\mathcal{P}\,k'|\zeta(k')|^2 d(k'^2)}{k^2-k'^2}}_{a}}$$

$$= \frac{1-a-ib}{1-a+ib} \Rightarrow \operatorname{tg}\delta_0 = \frac{-b}{1-a} = \frac{-km\lambda|\zeta(k)|^2/2\pi}{1 - \frac{m\lambda}{2\pi^2}\int \frac{\mathcal{P}k'}{k^2-k'^2}|\zeta(k')|^2 d(k'^2)}$$

On retrouve le théorème de Lévinson

k	0	∞
a	$a(0)$	0
b	0	0

si $a(0) > 1$
$\delta(0) = \pi$



si $a(0) < 1$
$\delta(0) = 0$

Potentiel séparable (Taylor p141 exerc 8.2)

(1°) La définition de T :

$T = V + VGV$ (1) donne $T(z) = \alpha(z)|\zeta><\zeta|$

L'équation de Lippmann-Schwinger | mult (1) par G_0 : $G_0 T = (G_0 + G_0 V G) V = GV$ puis remplacer GV de (1) par $G_0 T$

$T = V + VG^0 T$ donne $\alpha = \lambda + \lambda \Delta \alpha$ où $\Delta(z) = (\zeta|G^0(z)|\zeta) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{|\zeta(p)|^2}{z - E_p}$

d'où $T(z) = \dfrac{\lambda|\zeta><\zeta|}{1 - \lambda \Delta(z)}$ (on a alors $G = G_0 + G_0 T G_0$)

(2°) La série de Born

$X = V + VG_0V + VG_0VG_0V + \dots = \lambda|\zeta><\zeta|\left(1 + \lambda\Delta + (\lambda\Delta)^2 + \dots\right)$

converge si $|\lambda\Delta| < 1$ et on a alors $T = X$

Quand $E \to \infty$ $\Delta(E) \sim \frac{1}{E}$ d'où la condition à haute énergie $\left|\frac{\lambda}{E}\right| < 1$ (différent de la condition générale

(3°) Les états liés donnent des poles de $T(z)$ sur le $\frac{1}{2}$ axe réel négatif

Or pour $E < 0$ $\dfrac{1}{E - E_p}$ est une fonction décroissante

il en est de même de $\Delta(E) = \displaystyle\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{|\zeta(p)|^2}{E - E_p}$

E	$-\infty$ $\nearrow$ 0
$1 - \lambda\Delta(E)$	$1 \xrightarrow{\text{si } \lambda > 0} 1 - \lambda\Delta(0)$; $\searrow$ si $\lambda < 0$

$1 - \lambda\Delta(E)$ s'annule donc si

$$\lambda < \frac{1}{\Delta(0)} = -\frac{1}{\displaystyle\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{|\zeta(p)|^2}{E_p}}$$

Il y a donc 1 ou 0 état lié

~~Remarquer que si $\lambda < 0$ et qu'il n'y a pas d'état lié, alors $|\lambda\Delta(E)| < 1$~~

~~pour tout E réel positif et la série de Born converge~~ ← faux

(4°) On a $-(2\pi)^2 m \,(E\,l\,m|T(E+i0)|E'l'm') = \delta(E - E')\,\delta_{ll'}\,\delta_{mm'}\, f_l(E)$

(où $|Elm)$ normalisés sur l'énergie $(\vec{p}\,|Elm) = \frac{1}{\sqrt{mp}}\,\delta(E_p - E)\, Y_l^m(\hat{p})$)

Puisque $|\zeta)$ est sphérique on a $|\zeta) = \int_0^\infty dE\, \varphi(E)\, |E, l=0, m=0)$

et $(Elm|T(E+i0)|E'l'm') = \dfrac{\lambda}{1 - \lambda\Delta(E+i0)}\,\delta(E - E')\,|\varphi(E)|^2\,\delta_{ll'}\delta_{mm'}\delta_{l0}\delta_{m0}$

D'où $f_l(E) = |\varphi(E)|^2 \delta_{l0}$

Remarque. Le potentiel séparable donne d'excellents résultats dans des problèmes nucléaires à basse énergie, en particulier le problème à 3 nucléons