T. D

15 novembre 1973

On étudie le puits de potentiel à une dimension :

$$V(x) = -V_0 \quad \text{si} \quad |x| < a/2$$

$$V(x) = 0 \quad \text{si} \quad |x| > a/2$$

A l'onde incidente, venant de la gauche, d'énergie $E = \hbar^2 k^2/2m$, $\psi_{in}(x) = e^{ikx}$ $\quad x < -a/2$
correspond l'onde transmise

$$\psi_{tr}(x) = S(E)\, e^{ik(x-a)} \qquad x > a/2$$

1°) Calculer $S(E)$. Comment peut-on obtenir les états liés ?

Il est plus simple de chercher les solutions paires et impaires $\psi_\pm \sim sg(x) \cos(k|x| + \delta_\pm)$ [RAO]

2°) Pour quelles valeurs de l'énergie le coefficient de transmission $T = |S(E)|^2$ est-il maximum ? (résonances de transmission). Montrer qu'au voisinage d'une résonance d'énergie $E_0$ on a :

$$S(E) = \frac{\pm i\Gamma/2}{E - E_0 + i\Gamma/2}$$

où $\Gamma$ est un nombre positif.

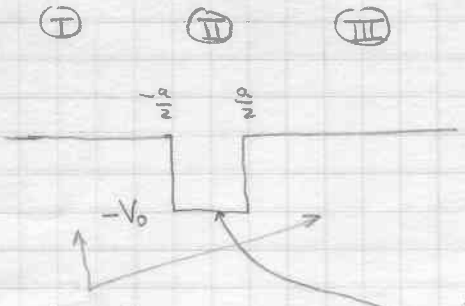
3°) On considère une particule incidente, d'énergie voisine d'une résonance, décrite par le paquet d'onde :

$$\psi_{in}(x,t) = \int dk\, f(k)\, e^{ik(x+a/2) - iEt/\hbar}$$

où on supposera que $f(k)$ n'est différente de zéro qu'au voisinage d'une résonance $E_0 = \hbar^2 k_0^2/2m$ et varie lentement près de cette résonance.
Montrer qu'approximativement :

$$\psi_{tr}(x,t) = A\, e^{ik_0(x-a/2) - iE_0 t/\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{E - E_0 + i\Gamma/2}\, e^{-i(E-E_0)[t-(m/\hbar k_0)(x-a/2)]/\hbar}$$

Calculer l'intégrale et en déduire qu'un état résonnant se comporte comme un « état lié » de durée de vie $\hbar/\Gamma$ .




$$-V_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} U_0$$

$$\psi'' + k^2 \psi = 0 \qquad \psi'' + K^2 \psi = 0 \qquad K^2 = k^2 + U_0$$

I : $\psi = e^{ikx} + R\, e^{-ikx}$

II : $\psi = A e^{iKx} + B e^{-iKx}$

III : $\psi = S e^{ik(x-a)}$

Continuité de $\psi$ et $\dfrac{d\psi}{dx}$

$$\alpha = e^{ika/2} \qquad \beta = e^{iKa/2} \qquad q = \frac{k}{K}$$

I | II
$$\begin{cases} \bar\alpha + R\alpha = A\bar\beta + B\beta \\ q(\bar\alpha - R\alpha) = A\bar\beta - B\beta \end{cases} \iff \begin{cases} 2A\bar\beta = (1+q)\bar\alpha + R\alpha(1-q) \\ 2B\beta = (1-q)\bar\alpha + R\alpha(1+q) \end{cases}$$

II | III
$$\begin{cases} A\beta + B\bar\beta = S\bar\alpha \\ (A\beta - B\bar\beta) = q S\bar\alpha \end{cases} \iff \begin{cases} 2A\beta = S\bar\alpha(1+q) \\ 2B\bar\beta = S\bar\alpha(1-q) \end{cases}$$

en éliminat A et B

$$\begin{cases} 2A = (1+q)\bar\alpha\beta + R\alpha\beta(1-q) = S\bar\alpha\bar\beta(1+q) & \big|\ \bar\beta(1+q) \\ 2B = (1-q)\bar\alpha\bar\beta + R\alpha\bar\beta(1+q) = S\bar\alpha\beta(1-q) & \big|\ -\beta(1-q) \end{cases}$$

en éliminat $R\alpha$

$$S\bar\alpha\left[\bar\beta^2(1+q)^2 - \beta^2(1-q)^2\right] = \bar\alpha\left[(1+q)^2 - (1-q)^2\right]$$

d'où
$$S = \frac{4q}{\bar\beta^2(1+q)^2 - \beta^2(1-q)^2} = \frac{1}{\frac{i}{2}\left(\frac{\bar\beta^2-\beta^2}{2i}\right)\left(\frac{1}{q}+q\right) + \frac{\bar\beta^2+\beta^2}{2}} = \frac{1}{\cos Ka - \frac{i}{2}\left(\frac{k}{K}+\frac{K}{k}\right)\sin Ka}$$

Etats liés

$q = i k_0$ ← réel positif

pôle de $S$ sur l'axe imaginaire $k$ ; en effet on aura alors :

$$\frac{\psi}{S} = \begin{cases} \text{I} & \frac{R}{S} e^{k_0 x} \qquad (\text{car } \frac{1}{S} = 0) \\ \text{II} & \\ \text{III} & e^{-k_0 x} \end{cases}$$

prop de $S$

$S(-\bar{k}) = \bar{S}(k)$

[ le chgt $i \to -i$, $k \to \bar{k}$ conserve les conditions aux limites. Se voit aussi sur la formule de $S$.
→ $S$ réel pour $k$ imaginaire

et $\psi$ est normalisable (réciproque vraie car spectre de $H$ réel : ainsi les résonances ne donnent pas de F.O. normalisable)

pôles de $S$ = zéros de $\cos Ka - \frac{i}{2}\left(\frac{k}{K} + \frac{K}{k}\right) \sin Ka$

$$= \cos Ka + \frac{1}{2}\left(\frac{k_0}{K} - \frac{K}{k_0}\right) \sin Ka$$

avec $K^2 = -k_0^2 + U_0$

(2)

$$T = |S|^2 = \frac{1}{\cos^2 Ka + \left[\frac{1}{4}\left(\frac{k^2}{K^2} + \frac{K^2}{k^2}\right) + \frac{1}{2}\right] \sin^2 Ka}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{k}{K} - \frac{K}{k}\right)^2 \sin^2 Ka}$$

$$\frac{k}{K} - \frac{K}{k} = -\frac{U_0}{Kk}$$

$$T = \frac{1}{1 + \frac{U_0^2}{4K^2k^2} \sin^2 Ka} = \frac{1}{1 + \frac{\sin^2 Ka}{4\frac{k^2}{U_0}\left(1 + \frac{k^2}{U_0}\right)}}$$

2 bis

$\pm 1 + (E - E_0)\alpha$

près de $K_0 a = n\pi$

$\cos Ka - \frac{i}{2}\left(\frac{k}{K} + \frac{K}{k}\right)\sin Ka$

$$= (-)^n + \underbrace{\frac{d}{dK}\left(\quad\right)_{Ka = n\pi}}\ \cancel{(K - K_0)}\ \frac{dK}{dE}(E - E_0)$$

$$-\frac{i}{2}\left(\frac{k_0}{K_0} + \frac{K_0}{k_0}\right) a\, (-)^n$$

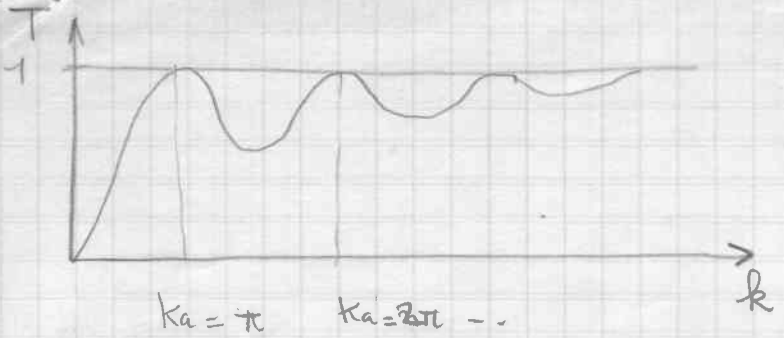
$$K^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E + U_0)$$

$$\left.\frac{dK}{dE}\right|_0 = \frac{m}{\hbar^2 K_0}$$

$$D = (-)^n\left[1 - \frac{m}{\hbar^2}\frac{i}{2}\left(\frac{k_0}{K_0^2} + \frac{1}{k_0}\right)(E - E_0)\right]$$

$$\frac{2}{i\Gamma} = -\frac{m}{\hbar^2}\frac{i}{2}\frac{k_0^2 + K_0^2}{K_0^2 k_0}$$

$$\Gamma = \frac{4\hbar^2}{m}\frac{K_0^2 k_0}{k_0^2 + K_0^2} \underline{\underline{> 0}}$$




recherche des pôles de S : compliqué

sont les zéros de $Z = \cos Ka - \frac{i}{2}\left(\frac{k}{K} + \frac{K}{k}\right)\sin Ka$

pour k réel $|Z|$ est minimum pour $Ka = n\pi$

posons donc $Ka = n\pi + x + iy$

où $|x + iy| \ll 1$

on a à peu près $\frac{k}{K} = \sqrt{\frac{n^2\pi^2 - \alpha}{n^2\pi^2}}$ $\qquad \alpha = U_0 a^2$

et $Z = 0$ s'écrit

$$1 - \frac{1}{2}\,\frac{2 - \frac{\alpha}{n^2\pi^2}}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{n^2\pi^2}}}\,\mathrm{sh}(ix - y) \simeq 0$$

D'où $x = 0$

et $\mathrm{sh}\, y = - \frac{\sqrt{1 - \alpha/n^2\pi^2}}{1 - \frac{\alpha}{2n^2\pi^2}}$

donc $y < 0$

Il y a donc un pôle en $E_0 - i\Gamma/2$ (positif)

[tel que $T = 1$]

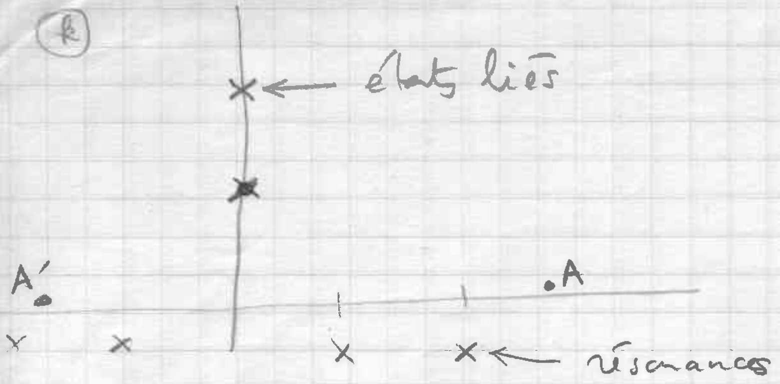
approximativement $S = \frac{r}{E - E_0 + i\Gamma/2}$ ← résidu

±S décrit le cercle :


pour $E = E_0$ (ie $Ka = n\pi$)

$S = \frac{1}{\cos n\pi} = \pm 1$ d'où $r = \pm i\Gamma/2$

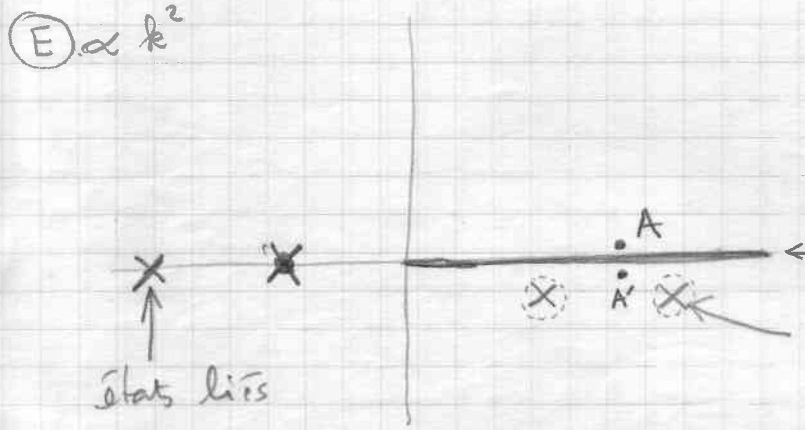
↖ formule fin p1




pôles de $S(k)$
(pas d'ennuis en $E+|V|=0$, car on peut choisir une détermination qq de $k$)

ou $S(E)$

1er feuillet $\quad \mathrm{Im}\, k > 0$ [feuillet physique]
2è $\quad$ " $\quad \mathrm{Im}\, k < 0$




coupure (les valeurs de $S$ en $A$ et $A'$ ne sont pas égales)

résonances (sur le 2ème feuillet


S est une fonction de $k$
puisque $E = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}$ à $E$ donné correspond 2 valeurs $\pm k$, donc aussi 2 valeurs de $S$.
Pour le domaine de définition de $S$,
~~Au~~ lieu de ne considérer qu'un plan complexe $E$ on en considère 2 : on les appelle feuillet

1er feuillet : $S(E)$ est défini par $S(k)$ où $\mathrm{Im}\, k > 0$
2ème feuillet : $S(E)$ ———— $< 0$

Remarquer que $S$ prend des valeurs non continues en $A$ et $A'$ pris sur le premier feuillet de $E$ : en effet ces points correspondent à des points éloignés sur le plan $k$ : on a donc une coupure le long de l'axe réel positif. Les 2 feuillets se raccordent le long de cette coupure


A' et B sont voisins
B' et A $\quad$ "

$$\psi_{tr}(x,t) = \int dk\; f(k)\, S(k) e^{ik(x-a/2) - iEt/\hbar}$$

$$S(k) \to \frac{\pm i\Gamma/2}{E-E_0+i\Gamma/2}$$

1er appr
[car $f=0$ loin de $k$ résonnance]

2e appr
[car $f$ varie peu]

$f(k) \to f(k_0)$

Remarque
la largeur du paquet d'onde $\Delta E \gg \Gamma$ (ce qui est le contraire d'un experience mesurant $\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$)

3 appr

$$k = k_0 + (E-E_0)\left.\frac{dk}{dE}\right)_0 \qquad \frac{dE}{dk} = \frac{2\hbar^2 k}{2m} = \hbar v$$

$$k = k_0 + \frac{E-E_0}{\hbar v} \quad ; \quad dk = \frac{dk}{dE}\, dE = \frac{dE}{\hbar v}$$

4 appr limites d'intégration $= -\infty$ et $+\infty$

d'où

$$\psi_{trans}(x,t) = \underset{[cte]}{A}\; e^{ik_0(x-a/2) - iE_0 t/\hbar}$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{E-E_0+i\Gamma/2}\; e^{i\frac{E-E_0}{\hbar}\left[\frac{1}{v}\left(x-\frac{a}{2}\right) - t\right]}$$

Calcul de l'intégrale
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u+i\Gamma/2\hbar}\; e^{iu\left[\frac{1}{v}\left(x-\frac{a}{2}\right)-t\right]}$$

* si $x - \frac{a}{2} - vt > 0$ : fermer le contour dans le ½ plan supérieur

$\to I = 0$

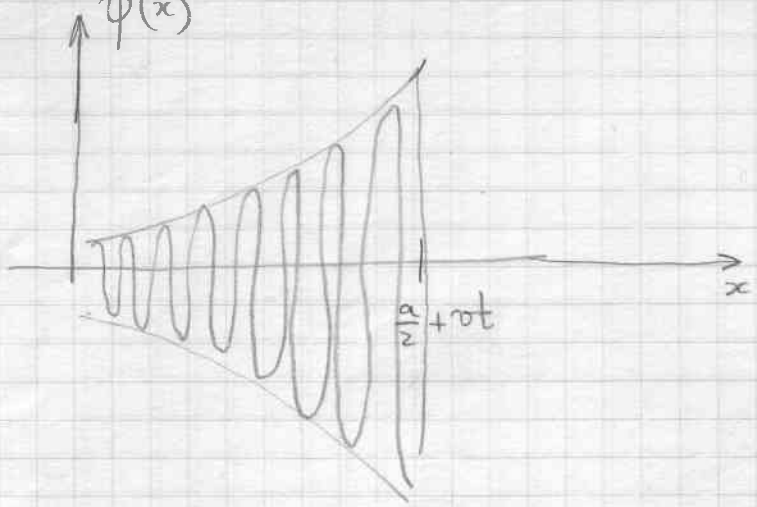
* si $x - \frac{a}{2} - vt < 0$ : fermer ——— inf

$$I = -2\pi i\; e^{\frac{-\Gamma}{2\hbar}\left(t - \frac{1}{v}\left(x-\frac{a}{2}\right)\right)}$$

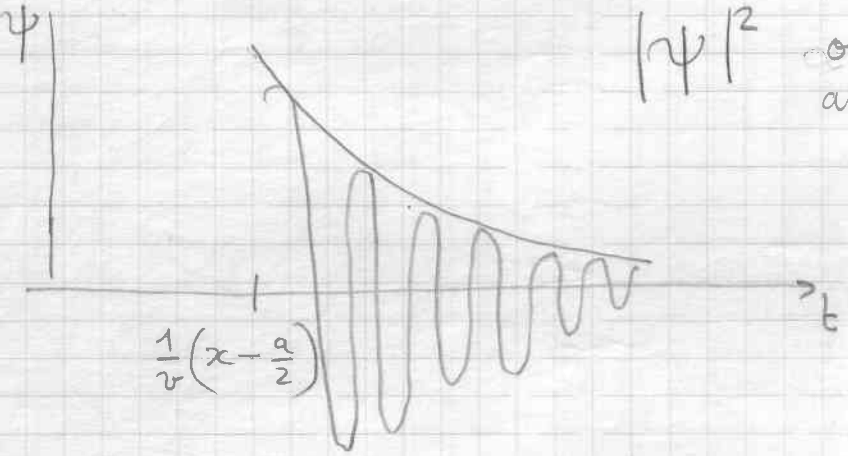
Enfin :

$$\psi_{tr} \simeq \begin{cases} 0 & x > \frac{a}{2}+vt \\ A'\, e^{ik_0(x-\frac{a}{2}) - iE_0 t/\hbar}\; e^{-\frac{\Gamma}{2\hbar}\left(t-\frac{1}{v}\left(x-\frac{a}{2}\right)\right)} & \text{si } x < \frac{a}{2}+vt \end{cases}$$

pour $t$ fixe :




pour $x$ fixe




$|\psi|^2$ oscille
amplitude max $e^{-\frac{\Gamma t}{\hbar}}$

caractéristique d'une durée de vie $\frac{\hbar}{\Gamma}$

<u>REMARQUE</u> Calcul de la section efficace : on doit intégrer $\int |\psi_{sc}|^2 dt$

cela donne un facteur $\Gamma |f(p_0)|^2$ qui à cause de $\Gamma$ est très petit (*)

Ainsi donc la probabilité de former un état résonant est très petite

Des états métastables très fins ne sont donc pas formés par diffusion directe

Exemple = Le noyau instable $^{210}Po$ est une résonance $\Gamma \sim 10^{-18}$ eV à 5,4 MeV dans le système $\alpha - {}^{206}Pb$. Il ne peut être formé dans les collisions à 5,4 MeV de particules $\alpha$ sur $^{206}Pb$ [ On l'obtient dans la réaction inélastique

$$d + {}^{209}Bi \rightarrow n + {}^{210}Po$$

(*) Interprétation du facteur $\frac{m}{p_0}\Gamma |f(p_0)|^2$ = probabilité que l'onde incidente ait l'énergie dans l'intervalle $\Gamma$