

**CAPES**  
**DE SCIENCES PHYSIQUES**

**ENONCES ET CORRIGES DE**  
**PROBLEMES DE PHYSIQUE**  
**DU CONCOURS**  
**(1988–1999)**

Corrigés par

**Jean-Jacques LABARTHE**

Laboratoire Aimé Cotton

[www.lac.u-psud.fr](http://www.lac.u-psud.fr)

[labarthe@lac.u-psud.fr](mailto:labarthe@lac.u-psud.fr)

Site d'affichage:

<http://perso.club-internet.fr/moririyo/physique/index.html>

Première version : 6 juillet 2002

Cette version : 10 novembre 2003

# CAPES

<b>Index des noms propres</b>	<b>12</b>
<b>ENONCES</b>	<b>14</b>
<b>1988 (incomplet)</b>	<b>15</b>
A. Régime transitoire d'un circuit R, L, C. . . . .	15
B. Oscillations forcées d'un circuit R, L, C. . . . .	18

C. Régime transitoire d'un oscillateur mécanique. . . . .	22
<b>1989</b>	<b>26</b>
PREMIERE PARTIE : Horloges naturelles et mécaniques . . . . .	28
A. Notions qualitatives. . . . .	28
B. Choix d'une unité de mesure. . . . .	30
C. Etude d'une horloge à balancier . . . . .	31
DEUXIEME PARTIE : Horloge à quartz . . . . .	38
A. Etude élémentaire de la piézo-électricité. . . . .	38
B. Etude électrocinétique d'une lame de quartz. . . . .	40
TROISIEME PARTIE . . . . .	44
Quelques questions posées par la réalisation d'une horloge atomique . . . . .	44
A. Emissions atomiques . . . . .	44
B. Etude d'un gaz mono-atomique . . . . .	46
<b>1990</b>	<b>49</b>
A. Choc de deux solides . . . . .	50

<i>CAPES</i>	5
B. Ressort . . . . .	55
C. Interaction de deux protons . . . . .	59
D. Loi d'Ohm . . . . .	62
E. Electricité . . . . .	64
<b>1991</b>	<b>73</b>
1. EMISSION ET PROPAGATION D'UNE ONDE SONORE . . . . .	74
1. Etude simplifiée d'un haut-parleur électrodynamique . . . . .	74
2. Propagation du son dans l'air par onde plane . . . . .	78
3. Interférences avec des ondes ultrasonores. . . . .	79
2. POUVOIR SEPARATEUR D'UNE LUNETTE ASTRONOMIQUE . . . . .	81
3. FORMATION D'UN COURANT ASCENDANT ET D'UN NUAGE . . . . .	84
<b>1992 (incomplet)</b>	<b>92</b>
DEUXIEME PARTIE. MECANIQUE . . . . .	92
I. Mouvement d'un point matériel dans un champ newtonien . . . . .	92
II. Etude énergétique du mouvement d'un point matériel dans un champ newtonien . . . . .	97

TROISIEME PARTIE. OPTIQUE . . . . .	100
I. ETUDE D'UN APPAREIL PHOTOGRAPHIQUE. . . . .	100
II. INTERFERENCES LUMINEUSES . . . . .	103
<b>1993</b>	<b>107</b>
Première partie. L'Arc-en-Ciel . . . . .	107
A. Modélisation optique . . . . .	107
B. Etude de la goutte d'eau . . . . .	111
C. Analogie avec l'arc-en-ciel atomique . . . . .	114
Diffraction d'une particule alpha par un noyau d'or . . . . .	115
Deuxième Partie. Electricité dans l'Atmosphère . . . . .	117
A. Etude de décharges électriques . . . . .	117
B. Le tonnerre . . . . .	119
C. Fluctuations du champ magnétique terrestre . . . . .	121
Troisième Partie. Le Soleil . . . . .	123
<b>1994 (incomplet)</b>	<b>134</b>

2EME PARTIE. PROPAGATION D'ONDES ACOUSTIQUES . . . . .	134
3EME PARTIE. THERMODYNAMIQUE . . . . .	143
<b>1995 (incomplet)</b>	<b>151</b>
Première partie. Phénomènes liés à l'atmosphère terrestre . . . . .	151
A) Stabilité de l'atmosphère terrestre . . . . .	151
B) Etude électrique du système (terre, atmosphère) . . . . .	156
Deuxième partie. Fonctionnement d'un haut parleur . . . . .	159
A) Etude mécanique . . . . .	161
B) Etude énergétique . . . . .	167
C) Alimentation du haut-parleur . . . . .	169
<b>1996</b>	<b>174</b>
PREMIERE PARTIE. Schéma de principe d'un oscillateur à fréquence modulée . . . . .	174
I) Etude d'un oscillateur . . . . .	174
II) Etude d'un oscillateur a fréquence modulée . . . . .	178
DEUXIEME PARTIE. Etude de convertisseurs d'énergie . . . . .	181

I) Etude thermodynamique théorique d'un moteur à combustion interne . . . . .	181
II) Etude d'un dispositif d'ascenseur . . . . .	186
TROISIEME PARTIE. Etude d'une lunette astronomique . . . . .	188
I) Grossissement et cercle oculaire . . . . .	188
II) Etude du pouvoir séparateur d'une lunette astronomique . . . . .	190
<b>1997 (incomplet)</b>	<b>203</b>
DEUXIEME PARTIE . . . . .	203
C. Production d'énergie électrique à partir d'un champ magnétique . . . . .	203
<b>1999 (incomplet)</b>	<b>210</b>
Partie A. Champs et interactions . . . . .	210
<b>CORRIGES</b>	<b>217</b>
<b>1988 (incomplet)</b>	<b>218</b>
A. Régime transitoire d'un circuit R, L, C. . . . .	218
B. Oscillations forcées d'un circuit R, L, C. . . . .	222

C. Régime transitoire d'un oscillateur mécanique . . . . .	231
<b>1989 (incomplet)</b>	<b>234</b>
PREMIERE PARTIE : Horloges naturelles et mécaniques . . . . .	234
C. Etude d'une horloge à balancier . . . . .	234
TROISIEME PARTIE . . . . .	249
Quelques questions posées par la réalisation d'une horloge atomique . . . . .	249
Etude d'un gaz mono-atomique . . . . .	252
<b>1990 (incomplet)</b>	<b>257</b>
A. Choc de deux solides . . . . .	257
<b>2</b> Ressort . . . . .	265
<b>3</b> Interaction de deux protons . . . . .	271
<b>1991 (incomplet)</b>	<b>276</b>
1. EMISSION ET PROPAGATION D'UNE ONDE SONORE . . . . .	276
1. Etude simplifiée d'un haut-parleur électrodynamique . . . . .	277

2. Propagation du son dans l'air par onde plane . . . . .	284
3. Interférences avec des ondes ultrasonores. . . . .	286
3. FORMATION D'UN COURANT ASCENDANT ET D'UN NUAGE . . . . .	290
<b>1992 (incomplet)</b>	<b>298</b>
DEUXIEME PARTIE. MECANIQUE . . . . .	298
I. Mouvement d'un point matériel dans un champ newtonien . . . . .	298
II. Etude énergétique du mouvement d'un point matériel dans un champ newtonien . . . . .	303
<b>1993 (incomplet)</b>	<b>309</b>
Première partie. L'Arc-en-Ciel . . . . .	309
Diffraction d'une particule alpha par un noyau d'or . . . . .	310
Deuxième Partie. Electricité dans l'Atmosphère . . . . .	316
A. Etude de décharges électriques . . . . .	316
<b>1994 (incomplet)</b>	<b>321</b>
3EME PARTIE. THERMODYNAMIQUE . . . . .	321

<i>CAPES</i>	11
<b>1995 (incomplet)</b>	<b>331</b>
Première partie. Phénomènes liés à l'atmosphère terrestre . . . . .	331
A) Stabilité de l'atmosphère terrestre . . . . .	331
B) Etude électrique du système (terre, atmosphère) . . . . .	336
Deuxième partie. Fonctionnement d'un haut parleur . . . . .	341
A) Etude mécanique . . . . .	341
B) Etude énergétique . . . . .	349
<b>1996 (incomplet)</b>	<b>353</b>
DEUXIEME PARTIE. Etude de convertisseurs d'énergie . . . . .	353
I) Etude thermodynamique théorique d'un moteur à combustion interne . . . . .	353
<b>1997 (non corrigé)</b>	<b>362</b>
<b>1999 (incomplet)</b>	<b>363</b>
Partie A. Champs et interactions . . . . .	363

# Index des noms propres

Abraham .....	117	Boltzmann .....	253
Airy .....	82	Borda .....	242
d'Alembert .....	78	Copernic .....	93
Archimède .....	235	Coriolis .....	31
Avogadro .....	49	Coulomb .....	311
Beau de Rochas .....	358	Descartes .....	108
Bell .....	69	Doppler .....	251
Binet .....	313	Einstein .....	251

Euler	119	Mayer	323
Feynman	206	Newton	367
Fresnel	191	Ohm	62
Galilée	258	Planck	250
Gauss	337	Rutherford	375
Geiger	375	Snell	108
Heisenberg	250	Thevenin	121
Helmholtz	322	Waals	253
Huygens	238	Wheatstone	121
Joule	221	Young	287
Kennelly	77		
Kepler	125		
Laplace	75		
Lenz	279		
Marsden	376		

# ENONCES

# 1988 (incomplet)

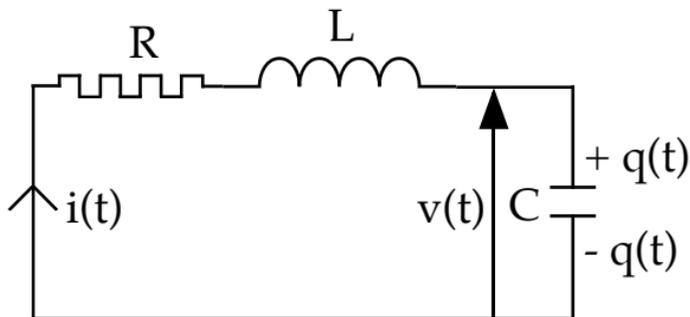
## A. Régime transitoire d'un circuit R, L, C.



Cette partie est corrigée page 218.

Dans le circuit de la figure 1,  $R$  est la résistance d'un conducteur ohmique,  $L$  est l'inductance d'une bobine dont la résistance est négligeable,  $C$  est la capacité d'un condensateur.

On désigne par

FIG. 1: *circuit RLC.*

- $q(t)$  la charge instantanée du condensateur à la date  $t$  ;
- $i(t)$  l'intensité instantanée dans le circuit à la date  $t$  ;
- $v(t)$  la tension instantanée aux bornes du condensateur à la date  $t$ .

1. En tenant compte des orientations indiquées sur le schéma, établir les relations entre  $q(t)$  et  $v(t)$  d'une part, et entre  $q(t)$  et  $i(t)$  d'autre part.

2. On suppose d'abord que la résistance  $R$  est nulle ; la tension initiale est  $v(0) = V_0$  ; le courant initial est  $i(0) = 0$ .

Etablir l'expression de  $v(t)$  ; on posera  $\omega_0^2 = 1/LC$ .

3. On étudie maintenant le cas où la résistance  $R$  n'est pas nulle.

a. Etablir l'équation différentielle à laquelle satisfait  $v(t)$  ; on posera  $\lambda = R/2L\omega_0$ .

b. Dire qualitativement quels sont les régimes d'évolution possibles de la tension  $v(t)$ . La résolution de l'équation différentielle n'est pas demandée.

c. Définir et exprimer la résistance critique  $R_c$ .

4. On se place encore dans le cas où la résistance  $R$  n'est pas nulle ;  $v(0) = V_0$  ;  $i(0) = 0$ .

Calculer l'énergie dissipée par effet Joule au cours du régime transitoire.

## B. Oscillations forcées d'un circuit R, L, C.



Cette partie est corrigée page 222.

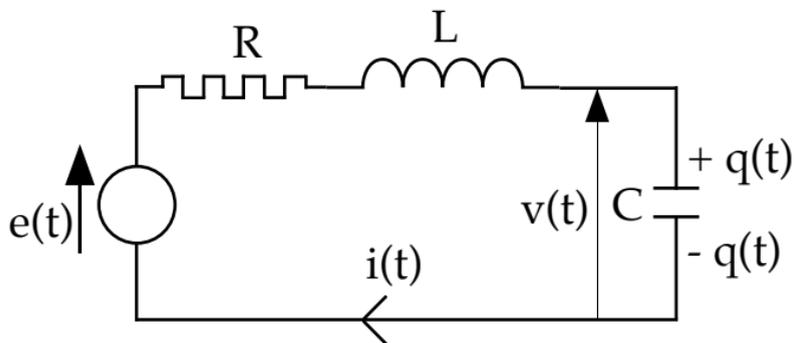
On insère dans le circuit RLC décrit dans la partie A un générateur de tension parfait dont la tension instantanée aux bornes est

$$e(t) = e_m \cos \omega t \quad (e_m : \text{tension maximale ; } \omega : \text{pulsation}).$$

On réalise ainsi le circuit représenté à la figure 2.

1. Etablir l'équation différentielle à laquelle satisfait  $q(t)$ .
2. Définir le régime transitoire et le régime forcé.
3. En régime forcé, on note l'intensité instantanée

$$i(t) = i_m \cos(\omega t + \phi).$$

FIG. 2: *circuit RLC avec un générateur.*

**3.1.** On introduit les grandeurs complexes  $\underline{e}$  et  $\underline{i}$  associées à  $e(t)$  et à  $i(t)$ , soit, respectivement

$$\underline{e} = e_m e^{j\omega t}, \quad \underline{i} = i_m e^{j\omega t} e^{j\phi} \quad \text{avec } j^2 = -1.$$

Déterminer l'impédance complexe  $\underline{z} = \underline{e}/\underline{i}$  en fonction des caractéristiques du circuit ( $R$ ,  $L$  et  $C$ ) et de la pulsation  $\omega$ .

**3.2.** Exprimer  $i_m$  et  $\phi$  en fonction des caractéristiques du circuit ( $R$ ,  $L$  et  $C$ ) et de la donnée  $e_m$ .

**3.3.a.** Qu'appelle-t-on résonance d'intensité?

- b. Quelle est alors la relation entre  $L$ ,  $C$  et  $\omega$ ?
  - c. Que peut-on dire du circuit à la résonance?
- 3.4.a.** Donner l'allure de la courbe indiquant comment varie  $i_m$  en fonction de la pulsation  $\omega$ .
- b. Définir puis établir l'expression donnant la bande passante.
  - c. Définir puis établir l'expression donnant le facteur de qualité.
4. En régime forcé, on note la tension aux bornes de la bobine

$$v_L(t) = u_m \cos(\omega t + \phi_L).$$

On pose

$$\alpha = \frac{u_m}{e_m}, \quad \theta = \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{et} \quad Q = \frac{L\omega_0}{R}.$$

**4.1.** Montrer que  $\alpha$  peut se mettre sous la forme

$$\alpha = \frac{\theta^2}{\sqrt{1 - \frac{2Q^2 - 1}{Q^2}\theta^2 + \theta^4}}.$$

**4.2.a.** A quelle condition sur  $Q$ ,  $\alpha$  admet-il un maximum?

**b.** Calculer la valeur  $\theta_m$  correspondante en fonction de  $Q$ .

**c.** Calculer la valeur  $\alpha_m$  du maximum de  $\alpha$  en fonction de  $\theta_m$ .

**4.3.** Etablir une expression équivalente simple de  $\alpha$  quand  $\theta \ll 1$ . En déduire l'allure de la courbe  $\alpha(\theta)$  au voisinage de l'origine.

**4.4.** Etablir une expression équivalente simple de  $\alpha$  quand  $\theta \gg 1$ . Que peut-on en déduire quant à la courbe représentative de  $\alpha(\theta)$ ?

**4.5.** A l'aide de développements limités d'ordre supérieur aux précédents, étudier comment, suivant les valeurs de  $Q$ , se situe la courbe  $\alpha(\theta)$  par rapport aux courbes trouvées précédemment (en B.4.3 et B.4.4) dans les parties  $\theta \gg 1$  et  $\theta \ll 1$ .

- 4.6. Sur le même système d'axes, donner les allures des courbes  $\alpha(\theta)$  pour  $Q = 0,5$  et  $Q = 5$ .
5. Calculer, en régime forcé, pour  $\omega = \omega_0$  :
- L'énergie  $\Delta W$  dissipée en une période ;
  - L'énergie maximale  $W_L$  de la bobine ;
  - L'énergie maximale  $W_C$  du condensateur ;
  - L'expression  $\beta = 2\pi W_L / \Delta W$  ; que constate-t-on ?

## C. Régime transitoire d'un oscillateur mécanique.



Cette partie est corrigée page 231.

On considère le dispositif de la figure 3.

Un ressort élastique, de masse négligeable, de raideur  $k$ , de longueur à vide  $l_0$ , a son extrémité supérieure

$S$  fixe. A l'extrémité inférieure est fixé un corps  $M$  assimilable à un point matériel de masse  $m$ .

Le rôle unique de l'amortisseur  $D$ , de masse négligeable, lié à  $M$ , est d'exercer sur le corps la force  $\vec{f}_f = -h\vec{v}$ , où  $\vec{v}$  désigne la vitesse de  $M$  et  $h$  un coefficient de frottement fluide, positif.

Les mouvements de  $M$  sont verticaux ; ils sont étudiés dans le référentiel, considéré comme galiléen, pour lequel  $S$  est fixe. La position de  $M$  est repérée, au cours du temps, par son abscisse  $x(t)$  sur l'axe vertical descendant  $Ox$ , fixe. A l'équilibre, l'abscisse de  $M$  est nulle.

1. A l'équilibre, l'allongement du ressort est désigné par  $a$ .

Exprimer  $a$  en fonction de  $m$ , de  $k$  et de la valeur absolue  $g$  de l'intensité de la pesanteur.

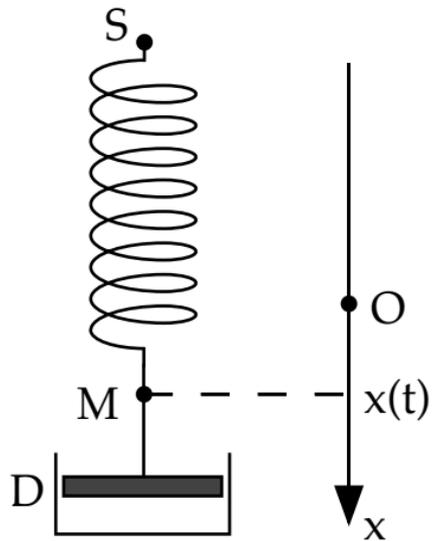
2. Etablir l'équation différentielle du mouvement de  $M$ .

3. On supprime l'amortisseur  $D$ , puis on abandonne  $M$  sans vitesse initiale à l'abscisse  $x(0) = X_0$ .

Etablir l'expression de  $x(t)$  ; on posera  $\omega_0^2 = k/m$ .

4. Après avoir remplacé l'amortisseur  $D$ , on reprend la même opération que celle décrite précédemment en C.3, on posera  $\mu = h/2m\omega_0$ .

- a.** Dire qualitativement quels sont les régimes possibles d'évolution de  $x(t)$ . La résolution de l'équation différentielle n'est pas demandée.
- b.** Définir et exprimer le coefficient de frottement critique  $h_c$ .
- 5.** Calculer l'énergie dissipée dans l'amortisseur  $D$  pendant le régime transitoire.

FIG. 3: *l'oscillateur mécanique.*

# 1989

*Valeurs numériques et relations pouvant être utiles à la résolution du problème.*

Vitesse de la lumière dans le vide :  $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$  ;

Constante de gravitation universelle :  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ .

Pour la Terre :

– distance moyenne au Soleil :  $d = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$  ;

– vitesse moyenne de translation sur sa trajectoire :  $u = 3,0 \cdot 10^4 \text{ m s}^{-1}$  ;

- rayon moyen :  $R_T = 6\,400$  km ;
- masse :  $M_T = 6,0 \cdot 10^{24}$  kg ;
- un jour solaire vrai = 24 h = 86 400 s ;
- la Terre fait un tour sur elle-même, dans un référentiel galiléen, en un jour sidéral soit 86 164 s ;
- latitude de Paris :  $\lambda_P = 48^\circ 51'$  ;
- accélération de la pesanteur à Paris :  $g = 9,81$  m s<sup>-2</sup> ;

Accélération de la pesanteur sur la Lune : 6 fois plus faible que sur la Terre ;

Constante de Planck :  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  J s ;

Constante de Boltzmann :  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  J K<sup>-1</sup> ;

Constante molaire des gaz parfaits :  $R = 8,31$  J mol<sup>-1</sup> K<sup>-1</sup> ;

Masse molaire de l'air :  $M = 29,0$  g mol<sup>-1</sup> ;

Masse volumique de l'air dans les conditions normales :  $\mu_s = 1,29$  kg m<sup>-3</sup> ;

Pour le césium 133, sous une pression de  $10^5$  Pa :

- température de fusion :  $T_f = 29$  °C,

– température d'ébullition :  $T_e = 670 \text{ }^\circ\text{C}$  ;

Quelques intégrales :

$$\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{4a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad (1)$$

$$\int_0^\infty x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{3}{8a^2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \quad (2)$$

## PREMIERE PARTIE : Horloges naturelles et mécanique

### A. Notions qualitatives.

Les êtres humains ont une connaissance intuitive de «l'écoulement du temps».

1. Citez des phénomènes naturels permettant à l'homme de quantifier cet écoulement en l'absence de tout instrument de mesure préalablement construit.
2. Voici deux propositions :

«Le skieur a effectué la descente en 76 s»;

«Le train est entré en gare à 6 h 48 min».

Trouvez-vous une différence entre les deux concepts de mesure qui leur sont associés? Dans l'affirmative, précisez les deux notions et indiquez celle qui selon vous, intervient dans la réalisation des divers instruments de «mesure du temps».

3. Les appareils utilisés pour dater les événements sont appelés horloges. Quelles doivent être les qualités du phénomène commandant le fonctionnement d'une horloge? Citez des types d'horloges utilisées au cours de l'histoire pour mesurer des intervalles de temps.
  
4. Ordres de grandeur (à exprimer dans l'unité légale du Système International):
  - quelle est la durée d'une révolution du centre d'inertie de la Terre autour du Soleil? Pour évaluer cet ordre de grandeur, à partir des valeurs numériques données en début d'énoncé, on assimilera le mouvement orbital de la Terre à un mouvement circulaire et uniforme.
  - quel «temps» met la lumière pour traverser une pièce d'habitation de 6 m de long?
  - une mouche a un battement d'ailes toutes les millisecondes. Qu'observe-t-on lors de la projection, à 24 images par seconde, du film de son mouvement, réalisé avec une caméra du type «24 images par

seconde»? Quel appareil faut-il utiliser pour observer l'immobilité des ailes? Comment procéder pour mesurer la durée d'un battement d'ailes avec un tel appareil?

## B. Choix d'une unité de mesure.

1. Le jour solaire vrai est la durée qui sépare deux passages consécutifs du Soleil au méridien d'un point de la surface terrestre.
  - a. Représentez la projection de la Terre supposée sphérique, sur le plan de l'équateur, pôle Nord au-dessus de ce plan; l'axe Nord-Sud est supposé perpendiculaire au plan de l'équateur. Dessinez. deux méridiens voisins en précisant l'angle qu'ils forment.
  - b. Quelle est l'heure solaire de Moscou ainsi que celle de Washington lorsqu'il est 8 heures à Paris, sachant que Moscou est à  $35^{\circ}27'$  à l'est de Paris, Washington à  $79^{\circ}25'$  à l'ouest de Paris, et que les horloges locales indiquent toutes 12 heures lorsque le Soleil est au zénith du lieu?
  - c. Quel est le décalage horaire (en considérant l'heure solaire) entre deux points situés à un kilomètre l'un de l'autre sur le parallèle passant par Paris? Quel est l'intérêt de la détermination du temps local?

2. Le jour sidéral est la durée de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles, dans un référentiel galiléen. En vous aidant d'un schéma, montrer que le jour sidéral a une durée plus courte que le jour solaire vrai ; on rappelle que les mouvements diurne et orbital de la Terre s'effectuent dans le même sens.
3. Quel est le phénomène qui permet de définir actuellement la seconde ?  
Pourquoi n'utilise-t-on plus ni le jour solaire vrai, ni le jour sidéral, comme unité de référence ?

## C. Etude d'une horloge à balancier



Cette partie est corrigée page 234.

L'étude des mouvements dans un référentiel lié à la Terre sera conduite en négligeant les forces d'inertie de Coriolis<sup>1</sup> : cela revient à « faire comme si » ce référentiel était galiléen, en remplaçant toutefois les forces de gravitation par les forces de pesanteur.

Le balancier d'une horloge de campagne est constitué d'une tige et d'un disque fixé à son extrémité inférieure (figure 4).

---

1. [Gaspard Gustave de Coriolis \(1792-1843\)](#)

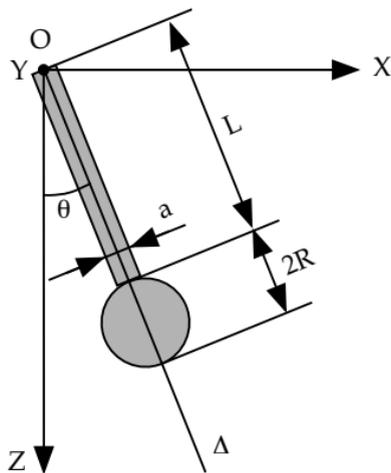


FIG. 4: *Balancier de l'horloge.*

La tige, de forme parallélépipédique, a pour longueur  $L = 15$  cm, largeur  $a = 1$  cm, épaisseur  $b = 2$  mm. Le disque est un cylindre de révolution de rayon  $R = 5$  cm, limité par deux sections droites distantes de  $c = 4$  mm.

L'axe du cylindre est parallèle à  $OY$ , axe de rotation horizontal du balancier, perpendiculaire au plan de la figure.

L'ensemble du balancier forme un solide homogène, en acier de masse volumique  $\mu = 7500 \text{ kg m}^{-3}$ .

Ce balancier constitue un pendule qui commande l'avancement des aiguilles de l'horloge.

On fera abstraction des autres éléments de celle-ci ; ils seront supposés ne pas affecter le mouvement du pendule.

A l'instant choisi comme origine des temps, le pendule est immobile et son axe de symétrie  $\Delta$  fait avec la verticale descendante  $OZ$  un angle  $\theta_0$ .

L'accélération de la pesanteur vaut localement  $\vec{g} = g\vec{k}$ ,  $\vec{k}$  étant le vecteur unitaire de l'axe  $OZ$ .

1. Quelles sont les forces appliquées au pendule précédent?
  
2. Montrer, par des considérations énergétiques – sans utiliser d'équation différentielle –, que le mouvement est périodique si les frottements peuvent être négligés.
  
- 3.a. Définissez le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe  $Oy$ .
  
- b. Calculez le moment d'inertie  $J_d$  du disque par rapport à son axe de révolution.

- c. Calculez le moment d'inertie  $J_t$  de la tige par rapport à un axe parallèle à  $OY$  et passant par son centre d'inertie.
- d. Calculez le moment d'inertie  $J$  du balancier par rapport à l'axe de rotation  $OY$  ; quel théorème est-il judicieux d'employer ? Énoncez-le.
- e. *Application numérique* : calculez  $J$ .
4. Est-il légitime de négliger la poussée d'Archimède ? Justifiez votre réponse.
5. Établissez l'équation différentielle du mouvement du balancier en supposant que l'influence des frottements est négligeable.
6. On suppose que l'angle  $\theta_0$  est de l'ordre de quelques degrés.  
Quelle propriété apparaît dans ce cas ? Quelle est alors la solution générale de l'équation différentielle ?  
Donnez la valeur littérale  $T_0$  de la période correspondante.
7. Pratiquement, l'angle  $\theta_0$  a une valeur plus importante.

a. Intégrez l'équation différentielle de la question 5 ; Donnez-en la signification physique.

b. Montrez que la période du pendule peut s'écrire

$$T = K \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} \quad (3)$$

$K$  étant un coefficient à déterminer.

c. Calculer  $T$  en fonction de  $T_0$  et  $\theta_0$  ; on pourra poser  $u = \sin(\theta/2) = \sin(\theta_0/2) \sin \phi$  et faire un développement qu'on limitera au deuxième ordre en  $\theta_0$ .

d. Calculer numériquement la période  $T_0$  à Paris. Quel est l'angle maximal  $\theta_{0m}$  tolérable si on veut que la période  $T$  diffère de moins de 1% de la période  $T_0$  ?

8. L'horloge est placée dans un avion, à Paris, sous la responsabilité d'un steward.

Au moment du décollage, l'appareil roulant sur une piste horizontale, l'accélération de l'avion peut être considérée comme constante. Le steward vous interroge : « Comment placer le plan d'oscillation du balancier pour que, ni la position d'équilibre, ni la période ne soient modifiées pendant le décollage ? »

Donnez votre réponse et justifiez-la.

9. L'avion atterrit à Singapour, lieu dont la latitude est  $\lambda_s = 1^\circ 22'$ .

a. Quelles sont les grandeurs physiques susceptibles de faire varier la période  $T_0$  lorsque l'horloge change de lieu?

b. On veut préciser l'influence de la seule latitude (l'altitude restant nulle).

On considère que la Terre tourne à vitesse constante autour de l'axe des pôles; On assimile le champ de gravitation total au seul champ créé par la Terre supposée formée d'une répartition de masses à symétrie sphérique. On rappelle que l'accélération de la pesanteur  $\vec{g}$  est telle que le poids d'un point matériel de masse  $m$  a pour expression  $\vec{p} = m\vec{g}$ .

$\alpha$ . Donner l'expression vectorielle de  $\vec{g}$  en fonction du rayon  $R_T$  de la Terre, de la latitude  $\lambda$  et de l'expression  $g_0 = GM_T/R_T^2$ . Que représente  $g_0$ ?

$\beta$ . Dans ce modèle, calculer les valeurs numériques de  $g_s$  et de  $g_p$ , accélération de la pesanteur à Singapour et à Paris.

$\gamma$ . En fait, les mesures effectuées donnent:  $g_s = 9,78 \text{ m s}^{-2}$  et  $g_p = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ . Comment justifier l'écart entre les valeurs mesurées et les valeurs calculées en  $\beta$ ?

$\delta$ . En ne tenant compte que de l'influence de la latitude, indiquez si l'horloge réglée à Paris est correctement réglée à Singapour. Précisez si elle avance ou retarde et calculez l'écart relatif de période  $(T_s - T_p)/T_p$ ;  $T_p$  est la valeur de la période à Paris,  $T_s$  sa valeur à Singapour.

**10. a.** Au cours d'un voyage Terre-Lune, l'impesanteur est supposée être momentanément réalisée à l'intérieur d'un véhicule spatial.

On dispose de deux instruments de mesure de temps : une horloge à balancier et une montre à quartz. Ces deux appareils fonctionnent-ils correctement ? Justifiez votre réponse.

**b.** Même question après l'arrivée sur la Lune.

**11.** L'étude du mouvement du balancier sur la Terre a été faite jusqu'ici en négligeant tout frottement. En réalité, des frottements existent ; pour simplifier, on suppose que les frottements solides sont toujours négligeables et que le moment des forces de frottement fluide par rapport à l'axe de rotation  $OY$  peut s'écrire  $-\alpha\dot{\theta}$ , où  $\alpha$  est une constante positive et  $\dot{\theta}$  la dérivée par rapport au temps de l'élongation  $\theta$ .

**a.** Ecrivez l'équation différentielle du mouvement du balancier dans le cas des oscillations de faible amplitude.

- b. Donner la solution générale en supposant que l'influence des frottements reste faible. Précisez l'allure de la courbe représentant les variations de l'élongation au cours du temps.
- c. Quelle conclusion en tirez-vous, concernant le mécanisme d'une horloge fonctionnant correctement ?

## DEUXIEME PARTIE : Horloge à quartz

Les horloges à quartz, plus fiables que les horloges mécaniques utilisent les propriétés piézo-électriques d'un quartz : ces propriétés permettent d'obtenir des étalons de fréquence meilleurs que les précédents.

La résolution de A n'est pas nécessaire pour aborder B.

### A. Etude élémentaire de la piézo-électricité.

Le quartz a pour formule brute  $\text{SiO}_2$  : dans un cristal de quartz, chaque atome de silicium est entouré par quatre atomes d'oxygène disposés aux sommets d'un tétraèdre régulier.

1.
  - a. Représentez un tétraèdre élémentaire du cristal de quartz.
  - b. On admet que la charge portée par chaque atome de silicium est  $+2\delta$ ; quelle est la charge portée par un atome d'oxygène, le cristal étant globalement neutre?
  - c. Dans le cristal, un atome d'oxygène est lié à deux atomes de silicium; quel est le moment dipolaire moyen associé au tétraèdre élémentaire? Qu'en est-il pour l'ensemble du cristal?
2.
  - a. Une lame de quartz, convenablement taillée, est comprimée suivant une direction (figure 5). Il apparaît alors des charges électriques opposées sur les deux faces parallèles  $A$  et  $B$ ; une traction suivant la même direction inverse le signe des charges. Donnez une interprétation de ce phénomène à l'échelle microscopique.

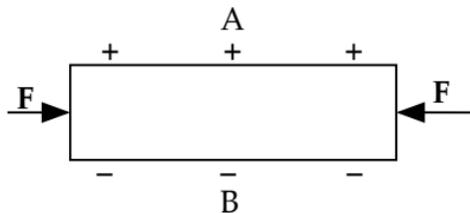


FIG. 5: la piézo-électricité.

**b.** De la même manière, si on métallise les faces  $A$  et  $B$  précédentes, et si on leur applique une tension  $u = V_A - V_B$ , la lame de quartz se dilate ou se contracte selon le signe de  $u$ . Interprétez ce phénomène à l'échelle microscopique.

**c.** Si la lame précédente est comprimée puis abandonnée sans contrainte, elle se met à osciller ; ses atomes sont animés de mouvements sinusoïdaux et les charges des faces  $A$  et  $B$  varient sinusoïdalement avec la même fréquence. Donnez la forme générale de l'équation différentielle régissant un mouvement oscillatoire harmonique.

**d.** En déduire le schéma d'un circuit électrique, composé de deux éléments passifs, qui semble équivalent au cristal de quartz précédent.

## B. Etude électrocinétique d'une lame de quartz.

L'expérience conduit, en fait, à une première modélisation de la lame de quartz métallisée précédente qui utilise deux condensateurs et une bobine ; en faisant abstraction des phénomènes dissipatifs, on retient le dipôle équivalent  $AB$  de la figure 6.

Dans ce qui suit, la tension appliquée à la lame de quartz est sinusoïdale

$$u = V_A - V_B = V\sqrt{2} \cos \Omega t.$$

On se limite à l'étude du régime sinusoïdal forcé. L'admittance complexe du dipôle s'écrit:  $Y = g + jb$  avec  $j^2 = -1$ .

1. a. Montrez que l'admittance du dipôle  $AB$  peut se mettre sous la forme

$$Y = j\Omega \left( C_0 + \frac{C}{1 - LC\Omega^2} \right).$$

b. Etudiez les variations de la *susceptance*  $b$  en fonction de  $\Omega$ . Précisez notamment l'expression de  $db/d\Omega$  et tracez la courbe représentative de  $b(\Omega)$ .

La pulsation pour laquelle  $b$  est infinie sera notée  $\Omega_1$  ; celle, non nulle, pour laquelle  $b$  est nulle sera notée  $\Omega_2$ .

c. Indiquez pour quelles valeurs de  $\Omega$  ce dipôle est de nature inductive ou capacitive.

2. a. Quel est le comportement du dipôle pour chacune des pulsations  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  ?

b. Pour des pulsations voisines de  $\Omega_1$ , on modélise le quartz par le dipôle de la figure 7. Justifiez cette schématisation et donnez les valeurs de  $L'$  et  $C'$ .

Montrez que, dans ces conditions, une variation  $\Delta\Omega$  de la pulsation provoque une variation  $\Delta Z$  de

l'impédance telle que  $|\Delta Z| = 2L|\Delta\Omega|$ .

c. Pour des pulsations voisines de  $\Omega_2$ , on modélise le quartz par le dipôle représenté figure 8. Pour justifier cette schématisation, montrez préalablement que, dans ces conditions, une variation  $\Delta\Omega$  de la pulsation provoque une variation  $\Delta Y$  de l'admittance du quartz telle que

$$|\Delta Y| = 2C_0|\Delta\Omega| \left(1 + \frac{C_0}{C}\right).$$

Donnez alors les valeurs de  $L''$  et  $C''$ .

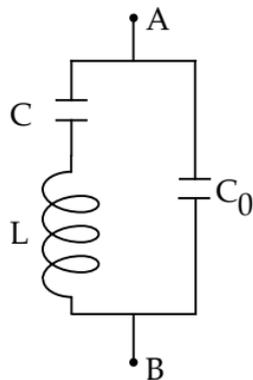
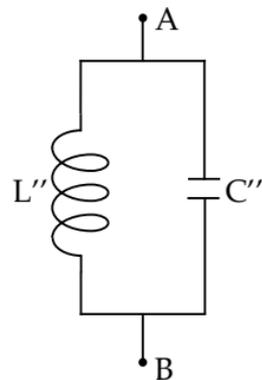
3. *Applications numériques*:  $C_0 = 1$  pF,  $C_0/C = 10^5$ ,  $f_1 = \Omega_1/2\pi = 10^6$  Hz.

a. Calculer  $L$  et  $\Delta f = f_2 - f_1$  ( $f_2$  est la fréquence associée à  $\Omega_2$ ).

b. Commentez le résultat obtenu pour  $L$ .

c. Que dire des variations de l'impédance et de l'admittance pour une variation de 1 Hz respectivement au voisinage de  $f_1$  et de  $f_2$ ?

4. On place, en parallèle sur le quartz, un condensateur de capacité  $C_2$ .

FIG. 6: *circuit  $LCC_0$ .*FIG. 7: *circuit  $L'C'$ .*FIG. 8: *circuit  $L''C''$ .*

- a. Montrez que la pulsation  $\Omega_1$  ne change pas, tandis que la pulsation  $\Omega_2$  diminue.
- b. Comment choisir  $C_2$  pour réduire de moitié l'écart de fréquence  $\Delta f$ ?

## TROISIEME PARTIE

### Quelques questions posées par la réalisation d'une horloge atomique



Cette partie est corrigée page 249.

Les horloges atomiques fournissent également des étalons de fréquence qui peuvent être préférés aux horloges à quartz.

Ce sont des dispositifs complexes comportant, eux aussi, un oscillateur à quartz, mais ce dernier, grâce à un dispositif d'asservissement, ne peut vibrer qu'à une fréquence imposée par un «oscillateur atomique».

La réalisation d'une horloge atomique conduit à aborder les questions évoquées ci-dessous.

#### A. Emissions atomiques

1. Dans une horloge atomique, on utilise les ondes électromagnétiques émises par des atomes excités.

a. Que signifie l'expression «atome dans un état excité»?

b. Quelle est la relation donnant la fréquence  $\nu$  de l'onde électromagnétique émise par un atome qui se désexcite?

Précisez clairement la signification des différents termes.

c. Dans une horloge atomique, la transition entre deux niveaux hyperfins d'un atome de césium 133 correspond à une onde de fréquence  $\nu = 9\,192\,631\,770$  Hz. Quelle est la longueur d'onde associée dans le vide?

Quel est le type d'ondes électromagnétiques émises dans ce domaine de longueur d'onde?

d. Quelle est la valeur de la quantité de mouvement d'un photon de fréquence  $\nu$ ?

e. Quel principe de la mécanique quantique exclut, en fait, la production d'une onde rigoureusement monochromatique?

Énoncez ce principe.

2. Les atomes émetteurs d'une onde électromagnétique sont toujours en mouvement par rapport à l'espace lié à l'observateur.

a. Justifiez cette affirmation.

b. La fréquence de l'onde perçue par l'observateur est différente de la fréquence d'émission. Quel est le nom de ce phénomène?

Ce phénomène existe-t-il pour des ondes autres que les ondes électromagnétiques? Illustrez votre réponse en décrivant une expérience de la vie courante.

c. Aux ondes électromagnétiques émises par les atomes des corps purs solides sont associés des spectres de bande; pour les corps purs gazeux, il s'agit de spectres de raies. Justifiez ces résultats.

Afin de minimiser la dispersion des fréquences entraînée par l'effet décrit en 2.b, on utilise donc un corps pur gazeux et on sélectionne les atomes se propageant dans une direction déterminée: un jet atomique de césium émis par un four. L'étude des vitesses des atomes de ce jet permet de connaître la dispersion en fréquence des radiations émises.

## B. Etude d'un gaz mono-atomique

1. Dans une horloge atomique la température du four dans lequel se forme la vapeur de césium est voisine de  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

a. Quel paramètre physique a-t-il fallu modifier pour que le césium soit effectivement à l'état de vapeur dans le four ?

Justifiez votre réponse en donnant l'allure du diagramme de stabilité des différentes phases d'un corps pur dans le cas le plus usuel. Donnez les noms des points remarquables de ce diagramme.

b. Pour quelle(s) raison(s) est-il préférable d'utiliser une vapeur à 100 °C au lieu de 670 °C.

2. Dans le four précédent, le césium 133 se comporte comme un gaz parfait mono-atomique. Un volume  $V$  contient  $N$  atomes de masse  $m$  (soit  $n = \frac{N}{V}$  atomes par unité de volume) à la température  $T$ .

a. Rappelez les significations, à l'échelle microscopique, de l'expression «gaz parfait».

b. Indiquez l'expression de l'énergie cinétique  $E$  d'un atome de gaz parfait mono-atomique en fonction de sa vitesse.

3. On admet que le gaz précédent obéit à la statistique de Boltzmann : le nombre d'atomes contenus dans un volume infinitésimal  $dV$  dont les vecteurs vitesses ont une norme comprise entre  $v$  et  $v + dv$  est

$$dN = A \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) v^2 dv dV. \quad (4)$$

- a. Donnez l'expression de  $N$ , nombre total d'atomes contenus dans le volume  $V$  en fonction de  $A$ .
- b. Calculez la vitesse quadratique moyenne  $u$  (racine carrée de la moyenne des carrés des vitesses des divers atomes) en utilisant le résultat précédent.
- c. *Application numérique* : Calculez cette vitesse pour le césium 133 gazeux à  $100\text{ }^\circ\text{C}$ .
4. Définissez l'énergie interne  $U$  du gaz parfait étudié contenu dans le volume  $V$  ; donnez son expression en fonction de la température absolue  $T$ .
5. En utilisant l'équation des gaz parfaits, montrez que la pression  $p$  peut s'écrire sous la forme  $p = \frac{1}{3}nm\bar{u}^2$ .  
Retrouvez directement cette relation, sans utiliser la statistique de Boltzmann, par l'étude mécanique des chocs des atomes sur une paroi.

# 1990

*Valeurs numériques pouvant être utiles à la résolution du problème :*

- Constante d'Avogadro<sup>2</sup>:  $N = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  ;
- Permittivité du vide:  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$  ;
- Célérité de la lumière dans le vide:  $c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$  ;
- Charge élémentaire:  $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  ;
- Masse de l'électron:  $9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$  ;

---

2. [Amedeo Avogadro \(1776-1856\)](#)

- Masse du proton :  $1,673 \cdot 10^{-27}$  kg.

## A. Choc de deux solides



Cette partie est corrigée page 257.

On dispose d'une table plane et horizontale sur laquelle sont placés deux solides  $A$  et  $B$ , de masses respectives  $m_A$  et  $m_B$ . Cette table, fixe dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, est percée de multiples trous permettant à une soufflerie d'envoyer des jets d'air. Les frottements seront ainsi négligés. Le solide  $B$  est initialement immobile et le solide  $A$  vient le heurter avec une vitesse caractérisée par le vecteur  $\vec{v}_0$ .

On supposera :

- que le choc est élastique ;
- que les solides sont toujours en translation.

On notera  $\vec{v}'_A$  et  $\vec{v}'_B$  les vecteurs vitesses respectifs des deux solides après le choc.

1. Préciser les caractéristiques d'un choc élastique.

**2.** On considère le même choc élastique analysé dans deux référentiels distincts : celui du laboratoire noté  $R$ , galiléen, et un autre référentiel  $R_1$  en translation par rapport à  $R$ . On notera  $\vec{v}_e$  le vecteur vitesse de translation de  $R_1$  par rapport à  $R$ .

**2.1.** Quelle est la propriété caractéristique d'un référentiel galiléen ?

**2.2.** Si le référentiel  $R$  est galiléen, à quelles conditions  $R_1$  le sera-t-il aussi ?

**2.3.** Quelle est la relation entre les vecteurs vitesses  $\vec{v}$  et  $\vec{v}_1$  d'un même point exprimés dans les deux référentiels ?

**2.4.** Exprimer la conservation de l'énergie lors du choc entre les deux solides dans chaque référentiel. En utilisant les relations précédentes, quelle loi de conservation retrouve-t-on ?

**3.** On suppose d'abord que les vecteurs vitesses  $\vec{v}'_A$  et  $\vec{v}'_B$  des deux solides restent colinéaires après le choc.

On choisit un axe  $x'x$  orienté dans le sens de  $\vec{v}_0$  (figure 9).

**3.1.** Exprimer en fonction du rapport des masses  $\alpha = m_B/m_A$  et de  $v_0$ , valeur algébrique de  $\vec{v}_0$ , les valeurs algébriques  $v'_A$  et  $v'_B$  des vitesses des deux mobiles après le choc.

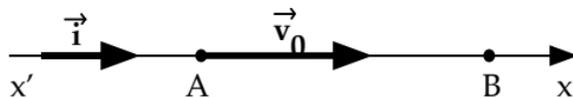


FIG. 9: Avant le choc (référentiel du laboratoire  $R$ ).

**3.2.** Qu'obtient-on si  $m_A = m_B$  ?

**4.** On suppose maintenant que les directions des vitesses sont quelconques après le choc et que les masses des deux solides sont égales.

Montrer que les vecteurs vitesses  $\vec{v}'_A$  et  $\vec{v}'_B$  sont orthogonaux après le choc.

Peut-on déterminer complètement ceux-ci ?

**5.** Les masses  $m_A$  et  $m_B$  sont différentes et on suppose les directions des vecteurs vitesses  $\vec{v}'_A$  et  $\vec{v}'_B$  quelconques. Le solide  $B$  est toujours immobile avant le choc.

**5.1.** Dans le référentiel  $R$  du laboratoire, déterminer, en fonction de  $\vec{v}_0$  et du rapport des masses  $\alpha = m_B/m_A$ , le vecteur vitesse  $\vec{v}_G$  et le mouvement du centre de masse  $G$  de l'ensemble  $A$  et  $B$  :

– avant le choc ;

- après le choc.

**5.2.** On utilise un référentiel, noté  $R^*$ , appelé référentiel du centre de masse (ou encore référentiel barycentrique).

Ce référentiel est animé, par rapport au référentiel du laboratoire, supposé galiléen, d'un mouvement de translation tel, qu'à chaque instant, le centre de masse soit constamment immobile dans ce référentiel.

**a.** A quelle condition  $R^*$  sera-t-il aussi galiléen ?

**b.** Avant le choc, déterminer dans  $R^*$ , en fonction de  $m_A$ ,  $\alpha$  et  $\vec{v}_0$  :

- les vecteurs vitesses  $\vec{v}_A^*$  et  $\vec{v}_B^*$  ;
- les quantités de mouvement  $\vec{p}_A^*$  et  $\vec{p}_B^*$  ;
- les énergies cinétiques  $E_{cA}^*$  et  $E_{cB}^*$ ,

des deux solides  $A$  et  $B$ .

**5.3.** Après le choc, supposé élastique,

**a.** Comparer les quantités de mouvement  $\vec{p}'_A^*$  et  $\vec{p}'_B^*$ .

b. Calculer l'énergie cinétique totale  $E_c'^*$  du système formé par les deux solides et montrer que les modules des quantités de mouvement ne sont pas modifiés par le choc dans  $R^*$ .

c. On suppose que dans  $R^*$ , toutes les directions des quantités de mouvement et donc des vitesses sont probables. On peut représenter  $\vec{v}_A'^*$  par un vecteur d'origine fixe et dont l'extrémité se trouve sur un cercle (figure 10).

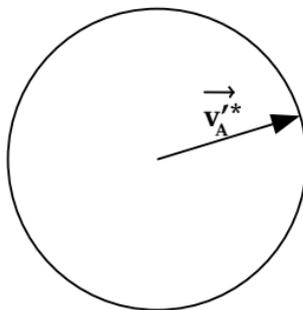


FIG. 10: La vitesse  $\vec{v}_A'^*$  après le choc (référentiel  $R^*$ ).

Représenter alors  $\vec{v}_B'^*$  avec la même origine lorsque  $\alpha < 1$ .

En utilisant les lois de composition des vitesses, représenter graphiquement les vecteurs vitesses  $\vec{v}_A'$  et  $\vec{v}_B'$  dans le référentiel du laboratoire. Montrer que, dans ce dernier cas, le projectile A est dévié au maximum

d'un angle  $\theta_m$  que l'on calculera dans le cas où  $\alpha = m_B/m_A = 1/2$ .

## B. Ressort

### 1.

Le solide  $A$ , de masse  $m_A$ , glissant en translation sur la table horizontale, est animé d'une vitesse caractérisée par le vecteur  $\vec{v}_0$ , les frottements étant toujours négligeables. Il vient heurter l'extrémité libre  $M$  d'un ressort, initialement détendu, de longueur à vide  $l_0$ , de raideur  $k$  et de masse négligeable; ses spires ne sont pas jointives. L'autre extrémité du ressort est attachée à une paroi fixe. On prend comme état de référence le ressort détendu.

**1.1.** On appelle  $m$  la projection de  $M$  sur un axe  $Ox$  parallèle à la direction du ressort (figure 11); on pose  $\overline{Om} = x$ . Lorsque le ressort est au repos,  $x = 0$ .

Exprimer l'énergie potentielle de ce ressort à un instant quelconque, en fonction de  $x$ . En déduire la longueur minimale du ressort au cours de l'interaction.

### 1.2.

a. Exprimer les forces appliquées au solide  $A$ .

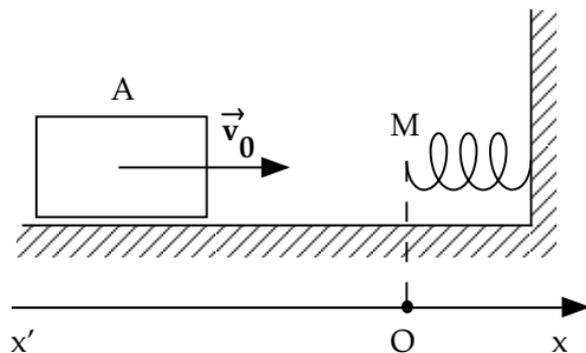


FIG. 11: Avant le choc contre le ressort.

- b. En déduire l'équation différentielle du mouvement.
- c. Donner la solution  $x(t)$  de cette équation.
- d. Sachant que le contact solide-ressort cesse lorsque ce dernier reprend sa longueur à vide, en déduire la durée  $\tau$  de l'interaction.

*Application numérique* :  $v_0 = 0,25 \text{ m s}^{-1}$  ;  $k = 15 \text{ N m}^{-1}$  ;  $m_A = 0,6 \text{ kg}$  ;  $l_0 = 0,15 \text{ m}$ .

2. Le ressort est lié maintenant au solide  $B$ , de masse  $m_B$ , initialement immobile. Le projectile  $A$  de vecteur vitesse  $\vec{v}_0$  vient heurter l'autre extrémité libre du ressort initialement détendu (figure 12)

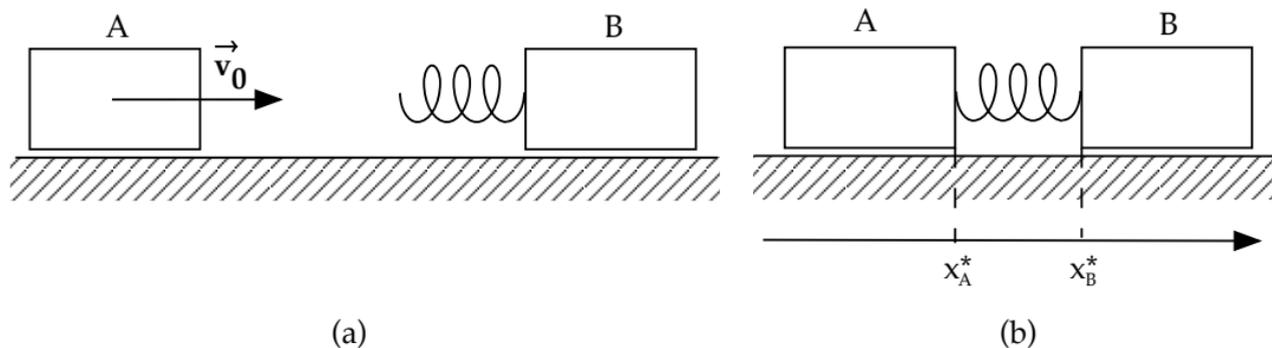


FIG. 12: (a) avant le choc dans  $R$ ; (b) dans  $R^*$ .

On suppose que ce choc est unidirectionnel, que la table est horizontale et que les frottements sont négligeables.

2.1. Expliquer pourquoi, dans le référentiel du laboratoire, on ne peut transformer toute l'énergie cinétique du projectile en énergie potentielle élastique.

2.2. Pourquoi est-ce possible dans le référentiel du centre de masse  $R^*$ ? Calculer dans celui-ci l'énergie

cinétique, avant le choc, du système formé par les deux solides et en déduire la longueur minimale du ressort au cours de l'interaction.

*Application numérique* :  $v_0 = 0,25 \text{ m s}^{-1}$  ;  $k = 15 \text{ N m}^{-1}$  ;  $m_A = m_B = 0,6 \text{ kg}$  ;  $l_0 = 0,15 \text{ m}$ .

### 2.3.

**a.** Calculer la vitesse du centre de masse des deux solides dans le référentiel du laboratoire. Celle-ci est-elle affectée par l'interaction ? Le référentiel du centre de masse  $R^*$  est-il galiléen ?

**b.** Dans ce référentiel,  $R^*$ , on utilise un repère d'origine  $G$ . Soient  $x_A^*$  et  $x_B^*$  les abscisses des deux extrémités du ressort.

Exprimer les forces appliquées à chaque solide, dans ce référentiel, en fonction de la raideur  $k$  et des abscisses  $x_A^*$  et  $x_B^*$ .

Ecrire les équations différentielles du mouvement de  $B$  et de  $A$ .

En déduire  $x(t) = x_B^*(t) - x_A^*(t)$ .

**c.** En supposant que l'interaction cesse lorsque le ressort reprend sa longueur initiale, déterminer :

- la durée de l'interaction  $\tau'$  ;
- les vitesses, après l'interaction, des solides  $A$  et  $B$  dans le référentiel  $R^*$  puis dans le référentiel  $R$ .

*Application numérique* :  $v_0 = 0,25 \text{ m s}^{-1}$  ;  $k = 15 \text{ N m}^{-1}$  ;  $m_A = m_B = 0,6 \text{ kg}$  ;  $l_0 = 0,15 \text{ m}$ .

## C. Interaction de deux protons

1. Deux protons, en interaction mutuelle dans le cadre de la mécanique non relativiste, sont à une distance  $r_0$ , lorsque le premier est immobile et le second animé d'une vitesse  $\vec{v}_0$  dirigée vers le premier (figure 13).

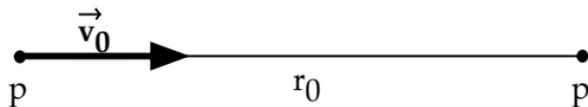


FIG. 13: *Interaction de deux protons.*

1.1. Quelles grandeurs physiques sont conservées au cours du temps ?

1.2. Expliquer pourquoi, dans le référentiel du laboratoire, on ne pourra jamais trouver simultanément les deux protons avec une vitesse instantanée nulle.

Pourquoi est-ce possible dans le référentiel du centre de masse ?

**1.3.** Indiquer les caractéristiques du champ électrostatique  $\vec{E}$  et du potentiel  $V$  créés par une charge ponctuelle  $q$  en un point situé à une distance  $r$  de celle-ci. Quelles sont les surfaces équipotentielles et les lignes de champ ?

**1.4.** Donner les expressions des forces exercées entre les deux protons en fonction de leur distance  $r$ . Exprimer leur énergie potentielle d'interaction  $E_p$ .

**1.5.** Calculer l'énergie cinétique initiale de l'ensemble des deux protons dans le référentiel du centre de masse.

En déduire l'énergie potentielle maximale de ce système ainsi que la distance minimale entre les deux protons.

Calculer la vitesse instantanée de chacun des protons dans le référentiel du laboratoire lorsque ceux-ci sont à leur distance minimale.

*Application numérique :*  $r_0$  est infiniment grand ;  $v_0 = 2 \cdot 10^6 \text{ m s}^{-1}$ .

## 2.

On considère à présent, dans le cadre de la mécanique relativiste, un proton incident dont l'énergie cinétique initiale est grande. Celle-ci est suffisamment élevée et on espère créer au cours d'un choc sur le

proton immobile une paire formée d'un proton  $p$  et d'un anti-proton  $\bar{p}$  :

$$p + p \longrightarrow p + p + p + \bar{p}. \quad (5)$$

On négligera l'énergie potentielle initiale d'interaction, le proton incident étant très éloigné du proton cible.

**2.1.** Ce choc est-il élastique?

**2.2.** Quelles grandeurs physiques sont conservées?

**2.3.** Dans quel référentiel peut-on, éventuellement, obtenir les quatre particules simultanément immobiles?

En déduire :

- l'énergie cinétique initiale minimale dans ce référentiel et dans celui du laboratoire ;
- la vitesse initiale minimale du projectile dans le référentiel du laboratoire.

**2.4.** Comparer cette dernière vitesse à celle que devraient avoir deux protons ayant deux vitesses directement opposées dans le laboratoire.

## D. Loi d'Ohm<sup>3</sup>

On considère un électron libre dans un conducteur métallique, placé dans un champ électrique uniforme  $\vec{E}$ . A l'instant  $t_0$ , il subit un choc qui modifie sa vitesse. Celle-ci a alors une valeur quelconque  $\vec{v}_0$ .

On suppose qu'entre deux chocs, la seule force appliquée est la force électrique.

1.

Exprimer la vitesse  $\vec{v}(t)$  de l'électron à l'instant  $t$ , avant qu'il ne subisse un autre choc.

2.

Quelles sont les hypothèses qui permettent d'exprimer la vitesse moyenne  $\langle \vec{v} \rangle$  de l'ensemble des électrons sous la forme

$$\langle \vec{v} \rangle = - \left( \frac{e}{m} \right) \tau \vec{E} \quad (6)$$

où  $m$  est la masse de l'électron et  $e$  sa charge?

Que représente alors  $\tau$ ?

---

3. Georg Simon Ohm (1789-1854)

**3.**

D'un point de vue macroscopique, l'action des chocs est équivalente à une force de frottement fluide  $\vec{f} = -h\vec{v}$ , de sens contraire à la vitesse  $\vec{v}$ .  $h$  est une constante positive.

**3.1.** Écrire l'équation différentielle à laquelle obéit la vitesse.

**3.2.** Montrer que la vitesse tend vers une valeur limite

$$\vec{v}_1 = -\left(\frac{e}{m}\right)\tau\vec{E}. \quad (7)$$

On exprimera  $\tau$  en fonction des données.

**4.**

Le conducteur possède  $n$  électrons libres par unité de volume.

**4.1.** Exprimer le vecteur densité de courant  $\vec{j}$  en fonction de  $\vec{E}$ ,  $n$ ,  $\tau$ .

Quelle est l'expression macroscopique de cette relation?

4.2. En déduire l'expression de la conductivité  $\sigma$  du métal.

5.

Le cuivre possède autant d'électrons libres que d'atomes.

Calculer  $\tau$  et  $\langle \vec{v} \rangle$  pour un conducteur de cuivre de section  $s = 2 \text{ mm}^2$  parcouru par un courant d'intensité  $I = 1 \text{ A}$ .

*Données numériques pour le cuivre :*

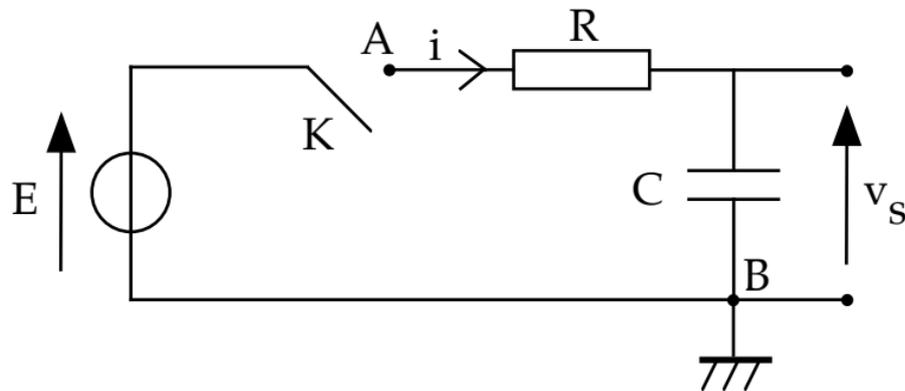
- conductivité:  $\sigma = 6 \cdot 10^7 \text{ } \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$  ;
- masse atomique molaire:  $A = 63,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$  ;
- masse volumique:  $\mu = 8920 \text{ kg m}^{-3}$ .

## E. Electricité

Un dipôle comporte entre deux bornes  $A$  et  $B$  une résistance  $R$  et un condensateur de capacité  $C$  placés en série.

1.

On place aux bornes  $A B$  un générateur de tension idéal de force électromotrice  $E$  et un interrupteur  $K$ . Initialement, le circuit est ouvert et le condensateur déchargé. Soit  $v_s$  la tension aux bornes du condensateur (figure 14). A l'instant  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur.

FIG. 14: *Le circuit.*

**1.1.** Quels sont les comportements du condensateur à l'instant  $t = 0$ , puis au bout d'un temps très long?

En déduire les valeurs correspondantes de  $v_s$ , de l'intensité  $i$  et de l'énergie du condensateur.

**1.2.** On pose  $\tau = RC$ .

Pour  $t \geq 0$ :

- a. Écrire l'équation différentielle à laquelle obéit  $v_s$ .
- b. Indiquer l'unité de  $\tau$ .
- c. Établir l'expression de  $v_s(t)$  et donner l'allure de la courbe correspondante en précisant :
  - l'asymptote ;
  - la pente initiale ;
  - les coordonnées de l'intersection de la tangente à l'origine et de l'asymptote.

*Application numérique* :  $R = 1 \text{ k}\Omega$  ;  $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$  ;  $E = 10 \text{ V}$ .

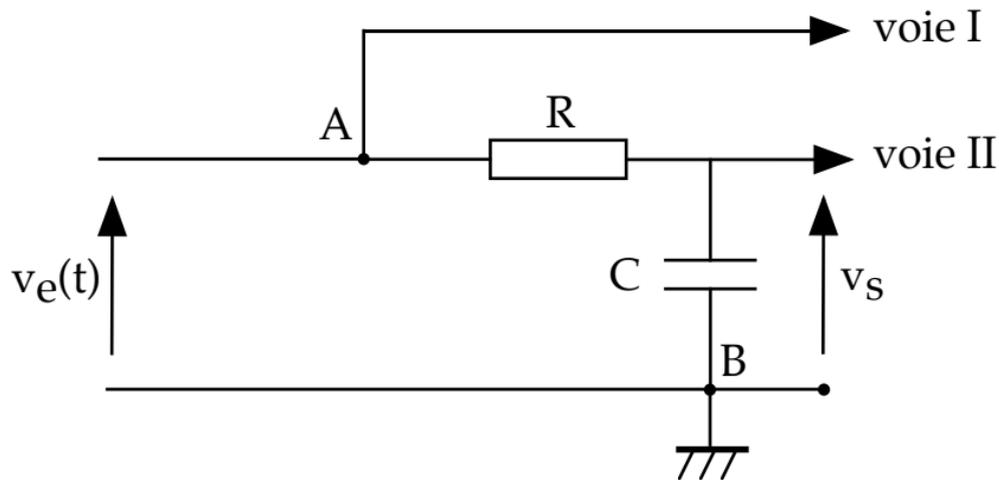
**2.**

Entre  $A$  et  $B$ , on applique une tension alternative sinusoïdale de la forme  $v_e(t) = V_e \cos \omega t$ , où  $V_e$  est une constante et où la pulsation  $\omega$  peut varier.

**2.1.** On utilise les deux voies d'un oscillographe bicourbe (figure 15). Pour une certaine fréquence, l'oscillogramme est le suivant (figure 16) (les calibres des deux voies sont différents).

- a. Quelle courbe correspond à la voie I? Justifier votre réponse.
- b. Déterminer le déphasage entre les tensions visualisées.
- c. En déduire la fréquence et la période utilisées.
- d. Quelle est la tension efficace aux bornes du condensateur?
- e. Donner l'expression de  $v_s(t)$ .

*Application numérique:*  $V_e = 200 \text{ V}$ ;  $R = 1 \text{ k}\Omega$ ;  $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$ .

FIG. 15: *Les deux voies.*

**2.2.** On double la fréquence, la valeur de  $V_e$  restant inchangée.

Déterminer la tension efficace aux bornes du condensateur.

**2.3.** En faisant varier la fréquence, on obtient aux bornes du condensateur une tension de la forme

$$v_s = V_s(\omega) \cos[\omega t + \phi(\omega)]. \quad (8)$$

On appelle gain,  $G(\omega)$ , le rapport des tensions maximales

$$G(\omega) = \frac{V_s(\omega)}{V_e} \quad (9)$$

et gain en décibel<sup>4</sup>(dB)

$$H(\omega) = 20 \log G(\omega) \quad \text{où log représente le logarithme décimal.} \quad (10)$$

**a.** Indiquer les valeurs de  $G$  et  $H$  lorsque :

–  $\omega \rightarrow 0$  ;

–  $\omega \rightarrow \infty$ .

---

4. [Alexander Graham Bell \(1847-1922\)](#)

b. On appelle pulsation de coupure  $\omega_c$ , la pulsation pour laquelle la différence entre le gain (en décibel) et le gain maximum est de  $-3$  dB :

$$H(\omega_c) = H_{max} - 3 \text{ dB}. \quad (11)$$

Exprimer cette pulsation de coupure en fonction de  $R$  et de  $C$  ou de  $\tau$ .

**2.4.** On utilise maintenant une nouvelle résistance  $R'$  et un nouveau condensateur de capacité  $C'$  associés à  $R$  et  $C$  selon le schéma présenté sur la figure 17.

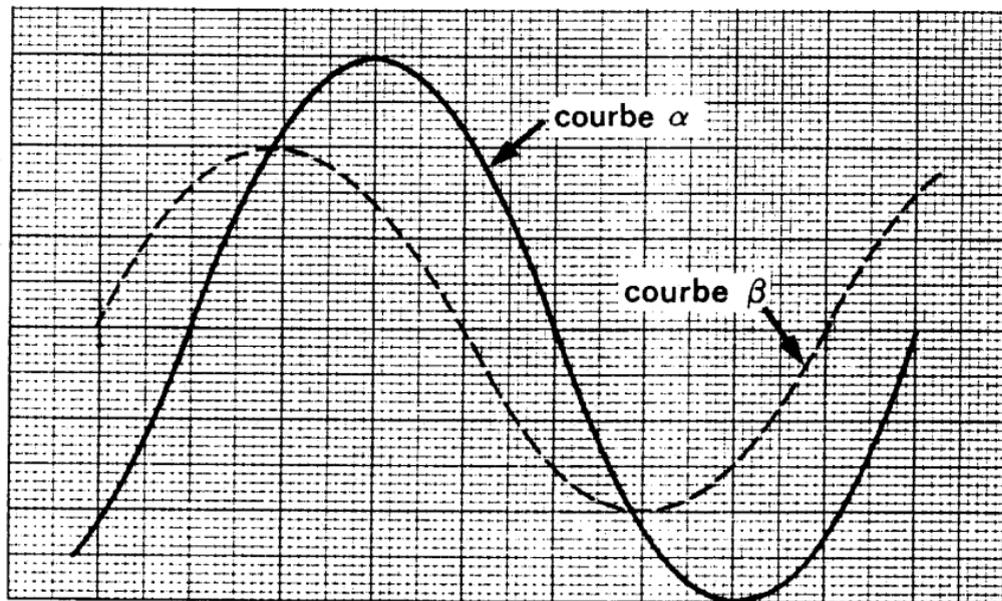
La tension d'entrée  $v_e(t)$  est toujours sinusoïdale

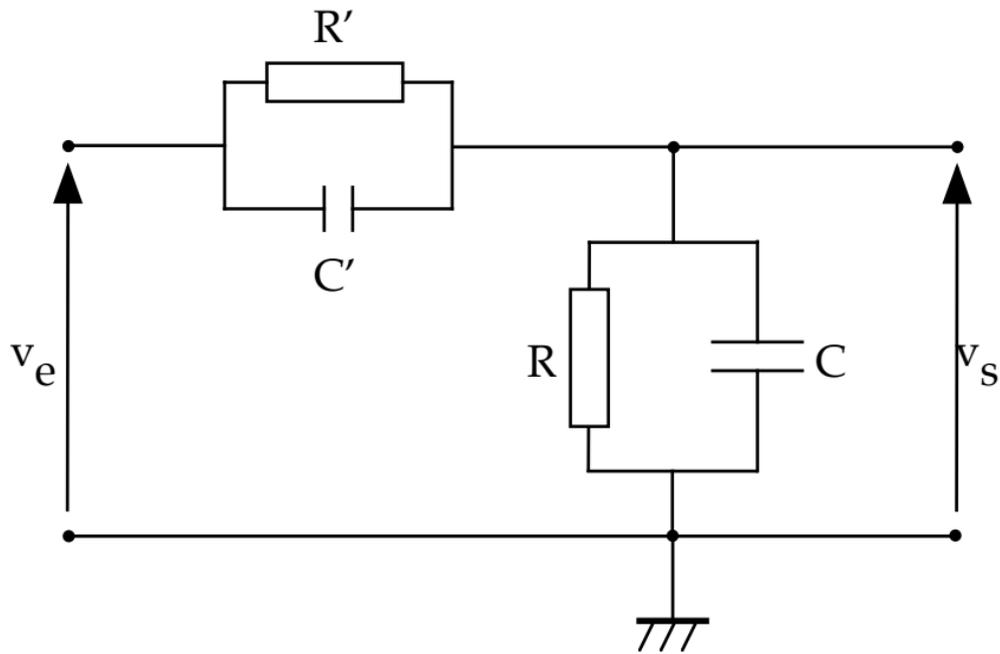
$$v_e = V_e \cos \omega t, \quad v_s = V_s \cos(\omega t + \phi). \quad (12)$$

a. Exprimer le gain  $G(\omega) = V_s/V_e$  en fonction de  $\omega$ ,  $R$ ,  $C$ ,  $R'$ ,  $C'$ .

b. A quelle condition celui-ci est-il indépendant de la fréquence?

c. Quel est alors l'intérêt du montage?

FIG. 16: *L'oscillogramme.*

FIG. 17: *Le nouveau montage.*

# 1991

*Valeurs numériques et relations pouvant être utiles à la résolution du problème.*

- Accélération due à la pesanteur :  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$  ;
- Constante molaire des gaz parfaits :  $R = 8,31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$  ;
- Masse molaire de l'air :  $M = 29,0 \text{ g mol}^{-1}$  ;
- Rapport des capacités calorifiques molaires à pression et à volume constant de l'air :  $\gamma = C_p/C_v = 1,40$ .

# 1. EMISSION ET PROPAGATION D'UNE ONDE SONORE



Cette partie est corrigée page 276.

## 1. Etude simplifiée d'un haut-parleur électrodynamique

Un haut-parleur électrodynamique est constitué (voir figure 18) :

- d'un aimant annulaire, d'axe horizontal  $x'x$ , créant un champ magnétique  $\vec{B}$  radial et de norme constante  $B$  dans la région utile de l'entrefer ;
- d'un solénoïde indéformable de même axe  $x'x$ , comportant  $N$  spires circulaires de rayon  $a$ , placé dans l'entrefer de l'aimant ;
- d'une membrane  $M$ , perpendiculaire à l'axe  $x'x$ , solidaire du solénoïde et pouvant effectuer de faibles déplacements axiaux autour de sa position d'équilibre grâce à un système élastique que l'on modélisera par un ressort unique de raideur  $k$ .

**1.1.** L'ensemble mobile (membrane + solénoïde), de masse  $m$ , repéré, par l'abscisse  $x(t)$  lorsqu'il est en mouvement, est soumis aux forces suivantes :

- son poids et la réaction du support verticale et opposée au poids ;
- la force de rappel du ressort de raideur  $k$  ;
- la résultante des forces de Laplace<sup>5</sup> exercées par l'aimant sur le solénoïde lorsqu'il est parcouru par un courant d'intensité  $i(t)$  ;
- une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse :  $\vec{F} = -\mu\dot{x}\vec{e}_x$ .

Faire un schéma, en respectant les orientations données, où figure la force élémentaire  $\vec{df}$  s'exerçant sur un petit élément  $i\vec{dl}$  de courant du solénoïde (on supposera sur ce schéma l'intensité  $i$  positive). Expliciter cette force élémentaire.

En déduire les caractéristiques de la résultante  $\vec{f}$  s'exerçant sur l'ensemble du solénoïde (on posera  $l = 2\pi Na$ ).

Le référentiel d'étude étant supposé galiléen, appliquer le théorème du centre d'inertie en projection sur l'axe  $x'Ox$ , la position d'équilibre lorsque le solénoïde n'est parcouru par aucun courant étant repérée par  $x = 0$ .

---

5. [Pierre-Simon marquis de Laplace \(1749-1827\)](#)

En déduire l'équation différentielle liant  $x(t)$  et ses dérivées à  $i(t)$  :

$$\text{(équation demandée).} \tag{13}$$

**1.2.** Le solénoïde se déplaçant dans l'entrefer à la vitesse  $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x = v(t)\vec{e}_x$ , calculer la force électromotrice induite  $e(t)$  par ce déplacement en fonction de  $B$ ,  $l$  et  $v$ . On adoptera la convention habituelle selon laquelle  $e$  est positive si, seule dans le circuit fermé, elle y fait circuler un courant d'intensité positive, et on précisera, à l'aide d'une figure, les autres conventions choisies. La bobine, de résistance  $R$  et d'inductance propre  $L$ , est connectée à une source idéale de tension délivrant la tension  $u(t)$ . Montrer que l'équation différentielle vérifiée par  $i(t)$  s'écrit

$$Ri + L\frac{di}{dt} - Blv = u \tag{14}$$

**1.3.** La source idéale délivrant une tension sinusoïdale  $u(t) = U\sqrt{2}\cos\omega t$ , on se propose d'étudier le régime forcé à la pulsation  $\omega$  imposée par la source. On associe à  $u(t)$  la forme complexe

$$\underline{u}(t) = U\sqrt{2}e^{j\omega t} = \underline{U}\sqrt{2}e^{j\omega t} \quad \text{avec} \quad j^2 = -1. \tag{15}$$

On cherche alors  $i(t)$  et  $v(t)$  sous les formes complexes associées :

$$\underline{i}(t) = I\sqrt{2}e^{j(\omega t - \phi)} = \underline{I}\sqrt{2}e^{j\omega t} \quad \underline{v}(t) = V\sqrt{2}e^{j(\omega t - \psi)} = \underline{V}\sqrt{2}e^{j\omega t}. \tag{16}$$

A partir de l'équation (13), exprimer  $\underline{V}$  en fonction de  $\underline{I}$ . En utilisant l'équation (14), écrire la relation liant  $\underline{U}$ ,  $\underline{I}$  et  $\underline{V}$ . Déduire des résultats précédents la relation entre  $\underline{U}$  et  $\underline{I}$  que l'on mettra sous la forme :  $\underline{U} = \underline{Z}\underline{I}$  où  $\underline{Z}$  est une impédance complexe.

On note  $\underline{Z}_L$  l'impédance complexe de la bobine en l'absence de mouvement de la membrane ; exprimer  $\underline{Z}_L$ .

Montrer que l'on peut mettre  $\underline{Z}$  sous la forme  $\underline{Z} = \underline{Z}_L + \underline{Z}_m$  où  $\underline{Z}_m$  représente l'impédance motionnelle du haut-parleur. Exprimer les parties réelle et imaginaire de  $\underline{Z}_m$ , soit :

$$\underline{Z}_m(\omega) = R_m(\omega) + jX_m(\omega) \quad (17)$$

où  $R_m$  représente la résistance motionnelle et  $X_m$  la réactance motionnelle.

**1.4.** On se propose de tracer le diagramme d'impédance du haut-parleur. Soit  $P(\omega)$  le point du plan complexe d'affixe  $\underline{Z}_m(\omega)$ . Montrer que le lieu décrit par le point  $P$  quand  $\omega$  varie est un cercle de rayon  $R_0$  tangent à l'axe imaginaire à l'origine, appelé cercle de Kennelly<sup>6</sup>. Exprimer  $R_0$  en fonction de  $B$ ,  $l$  et  $\mu$ .

- Placer les points correspondant à  $\omega \rightarrow 0$ ,  $\omega \rightarrow \infty$  et  $\omega = \omega_0 = \sqrt{k/m}$  ;
- L'énergie fournie par la source est dissipée en partie dans la résistance ohmique  $R$  sous forme de chaleur et dans la résistance motionnelle  $R_m$  sous forme d'émission acoustique. Dans quel intervalle

---

6. Arthur Edwin Kennelly (1861-1949)

de pulsation  $[\omega_1, \omega_2]$  la résistance motionnelle est-elle de valeur supérieure ou égale à  $R_0$ ? Placer les points correspondant à  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sur la courbe précédente. Exprimer  $\omega_2 - \omega_1$  en fonction de  $\mu$  et de  $m$ .

## 2. Propagation du son dans l'air par onde plane



Cette partie est corrigée page 284.

On considère la propagation du son dans l'air par ondes planes le long de l'axe  $Ox$ . Les vibrations étant longitudinales, on appelle  $\xi(x, t)$  l'élongation instantanée d'une particule de fluide, c'est-à-dire son déplacement par rapport à sa position d'équilibre repérée par la variable  $x$ .

**2.1.**  $\xi(x, t)$  est solution d'une équation de d'Alembert<sup>7</sup> à une dimension, du type :

$$\frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (18)$$

Que représente  $c$ ? Donner, sans démonstration, la forme générale de  $\xi(x, t)$  et préciser sa signification.

---

7. Jean le Rond d'Alembert (1717-1783)

**2.2.** On se propose de déterminer expérimentalement la vitesse de propagation du son dans l'air. On dispose pour cela d'un haut-parleur, d'un générateur idéal de tension pouvant délivrer une tension sinusoïdale de fréquence  $f$ , d'un microphone et d'un oscilloscope. En supposant qu'à la sortie du haut-parleur on observe une onde sonore plane progressive sinusoïdale de fréquence  $f$ , donner l'expression de l'élongation instantanée  $\xi(x, t)$  d'une particule de fluide par rapport à sa position d'équilibre (repérée par la variable  $x$ ), sachant qu'à la sortie du haut-parleur (en  $x = 0$ ) on observe  $\xi(x = 0, t) = \xi_m \cos 2\pi ft$  et que l'on néglige toute atténuation.

Expliquer comment l'on devra procéder expérimentalement pour mesurer la longueur d'onde  $\lambda$  de cette vibration. En déduire la vitesse  $c$  du son dans l'air sachant que l'on trouve  $\lambda = 20,0$  cm pour  $f = 1700$  Hz.

**2.3.** La vitesse de propagation du son dans l'air libre est indépendante de la fréquence. Citer des faits de la vie courante ou imaginer des expériences simples qui permettent d'étayer cette assertion.

### 3. Interférences avec des ondes ultrasonores.



Cette partie est corrigée page 286.

Au lieu d'un haut-parleur on dispose maintenant de cellules piézo-électriques pour engendrer des ultrasons. Ces mêmes cellules peuvent également servir pour les détecter.

**3.1.** Lorsque l'on applique une tension sinusoïdale de fréquence  $f = 40,0$  kHz à une cellule piézoélectrique, on observe devant la cellule une émission d'onde plane progressive sinusoïdale de longueur d'onde  $\lambda = 0,85$  cm. En déduire la vitesse de propagation  $c$  des ultrasons produits dans l'air.

- On considère deux émetteurs connectés en parallèle à un générateur idéal de tension délivrant une tension sinusoïdale de fréquence  $f = 40,0$  kHz. Le circuit déphaseur (noté  $\Phi$  sur la figure 19) n'est pour l'instant pas connecté.

Ces deux émetteurs, situés en  $S_1$  ( $x = -D$ ,  $y = a/2$ ) et  $S_2$  ( $x = -D$ ,  $y = -a/2$ ) sont supposés quasi ponctuels et émettent sensiblement dans la même direction. On déplace une troisième cellule, jouant le rôle de détecteur, perpendiculairement à cette direction, le long de l'axe  $Oy$ . On supposera que les deux ondes arrivant au point  $M$  de coordonnées ( $x = 0$ ,  $y$ ) sont des ondes planes progressives de même amplitude se propageant selon  $S_1M$  et  $S_2M$ . Les distances  $a = 10,0$  cm et  $|y|$  étant petites devant la distance  $D = 1,50$  m, montrer que l'on peut observer un phénomène d'interférence en déplaçant le détecteur le long de  $Oy$ . En déduire l'expression littérale et numérique de l'interfrange  $i$ .

- On intercale entre les bornes de sortie du générateur idéal de tension, délivrant une tension sinusoïdale de pulsation  $\omega$ , et celles d'entrée de l'émetteur  $S_2$  un opérateur électrique idéal, appelé déphaseur, dont la fonction de transfert s'écrit :

$$H(j\omega) = \frac{v_s}{v_e} = \exp(j\Phi). \quad (19)$$

Quelle en sera l'action sur le phénomène d'interférence observé lorsque  $\Phi = -\pi/2$ ?

**3.2.** Pour réaliser ce circuit déphaseur on propose le montage de la figure 20.

En admettant que l'amplificateur opérationnel utilisé puisse être considéré comme idéal, exprimer la fonction de transfert harmonique  $H(j\omega) = \underline{v}_s / \underline{v}_e$ . Montrer que l'on a réalisé ainsi un circuit déphaseur dont le déphasage  $\Phi$  peut être ajusté par action sur la valeur de la capacité  $C$  du condensateur. Calculer la valeur de la capacité  $C$  pour que l'on ait  $\Phi = -\pi/2$  lorsque  $R = 1,00 \text{ k}\Omega$  et  $R' = 10,0 \text{ k}\Omega$ .

## 2. POUVOIR SEPARATEUR D'UNE LUNETTE ASTRONOMIQUE

On considère une lunette astronomique dont l'objectif est constitué par une lentille mince convergente, supposée parfaitement stigmatique et achromatique, de distance focale image  $f' = 800 \text{ mm}$ . La partie utile de la lentille est limitée par un diaphragme circulaire, centré sur l'axe optique, de diamètre  $\emptyset = 60 \text{ mm}$ . La lunette est précédée d'un filtre qui ne laisse passer que la lumière dont la longueur d'onde  $\lambda$  est voisine de  $0,50 \mu\text{m}$  et n'a pas d'autre action.

A l'aide de cet objectif on désire observer une étoile double, assimilée à deux sources ponctuelles  $S_1$  et  $S_2$  situées à l'infini, de même intensité, séparées par un angle  $\phi$  très petit (au maximum égal à quelques

dizaines de secondes d'angle). Ces deux étoiles sont par exemple les deux composantes de  $\Sigma$  163 Cas distantes angulairement de  $\phi = 34,7''$ .

1. Qu'appelle-t-on lentille parfaitement stigmatique? Lentille parfaitement achromatique?
2. Exprimer en fonction de  $\phi$  et de  $f'$  la distance  $\delta$  séparant les images de ces deux étoiles dans le plan focal image de l'objectif de cette lunette. Calculer numériquement  $\delta$  en  $\mu\text{m}$ .
3. En fait, lorsque la lunette est dirigée vers une étoile, assimilée à une source ponctuelle  $S$  placée à l'infini, on observe dans le plan focal image de la lentille une tache circulaire, appelée tache d'Airy<sup>8</sup>, dont le premier minimum nul, autour du centre brillant, correspond à un rayon angulaire  $\alpha$  donné par la relation :  $\alpha = 1,22\lambda/\emptyset$  (où  $\alpha$  est exprimé en radian lorsque  $\lambda$  et  $\emptyset$  sont exprimés en mètres).

Quel phénomène physique met-on ainsi en évidence?

Calculer numériquement, en secondes d'angle, la valeur de ce rayon angulaire  $\alpha$  pour la lunette étudiée; en déduire le diamètre  $d$ , exprimé en  $\mu\text{m}$ , de la tache d'Airy dans le plan focal image de l'objectif.

4. Quelle est la valeur minimale de la distance angulaire séparant les deux composantes d'une étoile double

---

8. [George Biddell Airy \(1801-1892\)](#)

pour que les deux étoiles puissent être séparées à l'aide de la lunette étudiée? On supposera que les deux images sont encore distinctes si le maximum central de la tache d'Airy correspondant à l'une des deux étoiles coïncide avec le premier minimum nul de la tache d'Airy correspondant à l'autre étoile.

Peut-on espérer, avec cet objectif, séparer les deux composantes de  $\Sigma$  163 Cas?

5. Pour observer l'image obtenue dans le plan focal de l'objectif on utilise un oculaire que l'on assimilera à une lentille mince convergente, supposée parfaitement stigmatique et achromatique, de distance focale image  $f'' = 8,0$  mm. Comment faut-il placer cette lentille pour que l'on puisse observer sans accommoder l'image d'une source ponctuelle placée à l'infini? Faire un schéma représentant la position des deux lentilles ainsi que le trajet de trois rayons lumineux (dont deux judicieusement choisis) issus d'une étoile faisant avec l'axe optique de la lunette l'angle  $\theta$ . En déduire, à l'aide de cette construction géométrique, la valeur du grandissement angulaire  $G$  de la lunette en fonction de  $f'$  et  $f''$ . Si les deux composantes d'une étoile double sont distantes angulairement de  $\phi$ , sous quel angle  $\phi'$  seront-elles visuellement séparées après traversée de la lunette? Calculer numériquement  $\phi'$  dans le cas de  $\Sigma$  163 Cas.
6. Sachant que la limite angulaire de résolution de l'œil  $\epsilon$  est de  $80''$  dans les meilleures conditions, le pouvoir séparateur de la lunette est-il limité par le pouvoir de résolution de l'œil ou par le pouvoir séparateur de l'objectif?  
Existe-t-il d'autres facteurs susceptibles de limiter ce pouvoir séparateur? Quelles méthodes utilise-t-on pour y remédier?

### 3. FORMATION D'UN COURANT ASCENDANT ET D'UN NUAGE



Cette partie est corrigée page 290.

Dans toute l'étude qui suit, le champ de pesanteur est supposé uniforme, l'air se comporte comme un gaz parfait de masse molaire  $M$  et de capacités thermiques  $C_p$  et  $C_v$  constantes.

L'air est supposé sec. Un point  $N$  de l'atmosphère est repéré par ses coordonnées cartésiennes dans un trièdre orthonormé  $(Ox, Oy, Oz)$ , tel que l'axe  $Oz$  coïncide avec la verticale ascendante, la cote  $z = 0$  étant prise au niveau de la mer. Le module de l'accélération de la pesanteur est appelé  $g$ . On désigne par  $p$  la pression au point  $N$ .

1. L'air est supposé être un fluide de masse volumique  $\rho$  localement en état d'équilibre. On considère une tranche d'air d'épaisseur  $dz$ , de volume  $Sdz$ . Préciser, à l'aide d'un schéma, la nature et la direction des forces extérieures appliquées sur cette tranche.

En écrivant que cette tranche reste en équilibre établir la relation

$$dp/dz = -\rho g.$$

On appelle  $p_0$  et  $T_0$  la pression et la température thermodynamique au niveau de la mer,  $p$  et  $T$  la

pression et la température thermodynamique à la cote  $z$ . Exprimer  $\rho$  à l'altitude  $z$  en fonction de  $M$ ,  $p$ ,  $T$  et de la constante molaire des gaz  $R$ .

Des relevés expérimentaux montrent qu'en l'absence de mouvement des masses d'air, la température est fonction affine de l'altitude  $z$ , pour  $z$  variant de 0 à 8000 m, suivant la loi

$$T = T_0 - \lambda z.$$

A l'aide de l'équation d'état des gaz parfaits et des relations précédentes montrer que la pression  $p$  et la température  $T$  à l'altitude  $z$  sont liées par la relation, appelée «loi de nivellement barométrique»,

$$T = T_0 \left( \frac{p}{p_0} \right)^q$$

où l'on exprimera l'exposant  $q$  en fonction de  $M$ ,  $g$ ,  $\lambda$  et  $R$ . Quelle est la dimension physique de cet exposant? Calculer numériquement  $q$  sachant que  $\lambda = 6,50 \cdot 10^{-3} \text{ K m}^{-1}$ .

On donne:  $p_0 = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  et  $T_0 = 288 \text{ K}$ . Exprimer numériquement la pression  $p$  en fonction de la température  $T$ .

2. L'état d'équilibre étudié précédemment n'est possible que si les isothermes et les isobares coïncident avec les équipotentielles du champ de pesanteur, donc ici avec les surfaces d'équation  $z = \text{constante}$ . Si, par suite d'hétérogénéités du sol, celui-ci présente des écarts de température d'un point à un autre, l'air qui

surmonte ces terrains s'échauffe différemment et se met en mouvement. On se propose d'étudier de façon très simplifiée la formation d'un courant ascendant.

On suppose que l'air est localement, à l'altitude  $z_1$ , et à la verticale du point  $Q$ , plus chaud que l'air avoisinant. Des photographies infrarouge montrent que ce gaz se détache verticalement sous forme d'une «bulle». Tout se passe comme si une certaine poche de gaz était limitée par une enveloppe souple et non tendue. Cette «bulle» de gaz, que l'on notera  $B$ , évolue ensuite sans échanger de matière ni de chaleur avec l'extérieur, la pression de la bulle restant égale à celle de l'air environnant à la même altitude. On supposera que la température de l'air environnant reste toujours fonction affine de la température ( $T = T_0 - \lambda z$ ).

- On note  $p_B$ ,  $T_B$  et  $\rho_B$  la pression, la température et la masse volumique du gaz emprisonné dans la bulle,  $T_A$  et  $\rho_A$  la température et la masse volumique de l'air environnant à la même altitude. Montrer que la bulle s'élève si la température  $T_B$  de la bulle est de valeur supérieure à celle de l'air environnant  $T_A$ .
- Le gaz emprisonné dans la bulle subit donc une transformation adiabatique que l'on supposera réversible. On appelle  $T_1$  la température du gaz dans la bulle à l'altitude de sa formation  $z_1$  et  $p_1$  la pression à l'altitude  $z_1$ . Quelle relation lie la pression  $p_B$  et la température  $T_B$  de la bulle au cours de son ascension aux valeurs initiales  $p_1$  et  $T_1$ ? Exprimer  $T_B$  en fonction de  $p_B$ .
- Montrer qu'il existe une altitude plafond  $z_2$  pour l'ascension de la bulle. On note  $T_2$  et  $p_2$  la température et la pression de la bulle lorsqu'elle arrive à cette altitude.

- Calculer numériquement  $T_2$  et  $p_2$  pour  $T_1 = 280$  K et  $z_1 = 2000$  m. En déduire la valeur de l'altitude plafond  $z_2$  à laquelle se stabilise la bulle.
  
- 3.** L'air étant supposé maintenant humide (c'est un mélange d'air sec et de vapeur d'eau), montrer comment l'on pourrait expliquer qualitativement la possibilité de formation d'un nuage au cours de l'ascension de cette bulle.

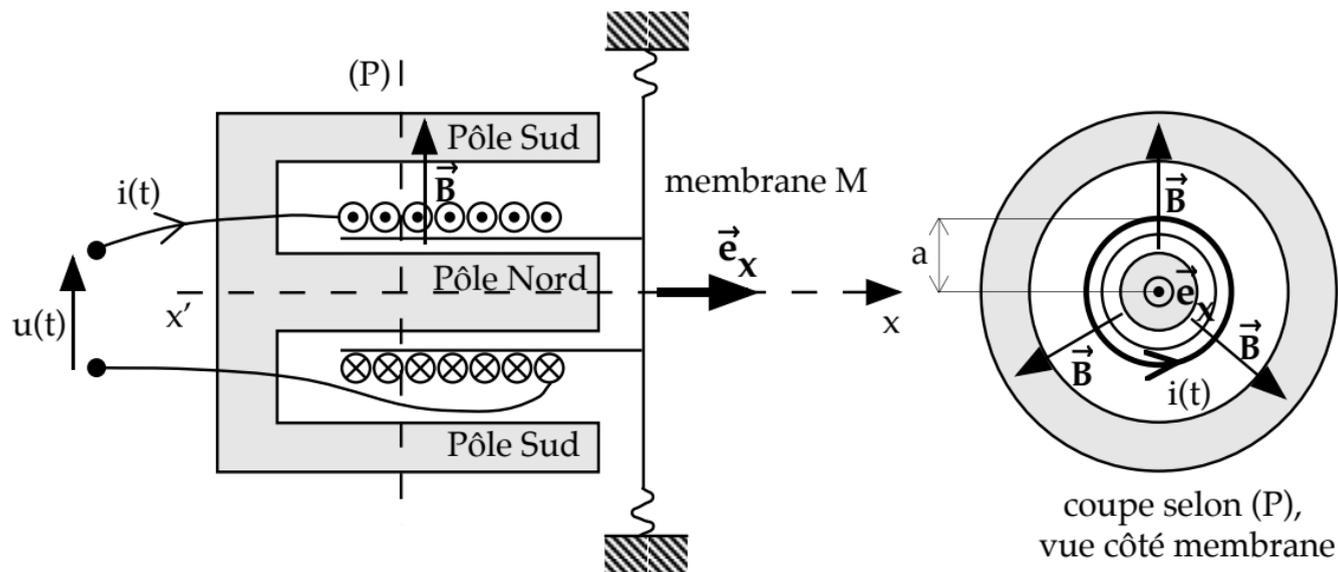


FIG. 18: haut-parleur électrodynamique.

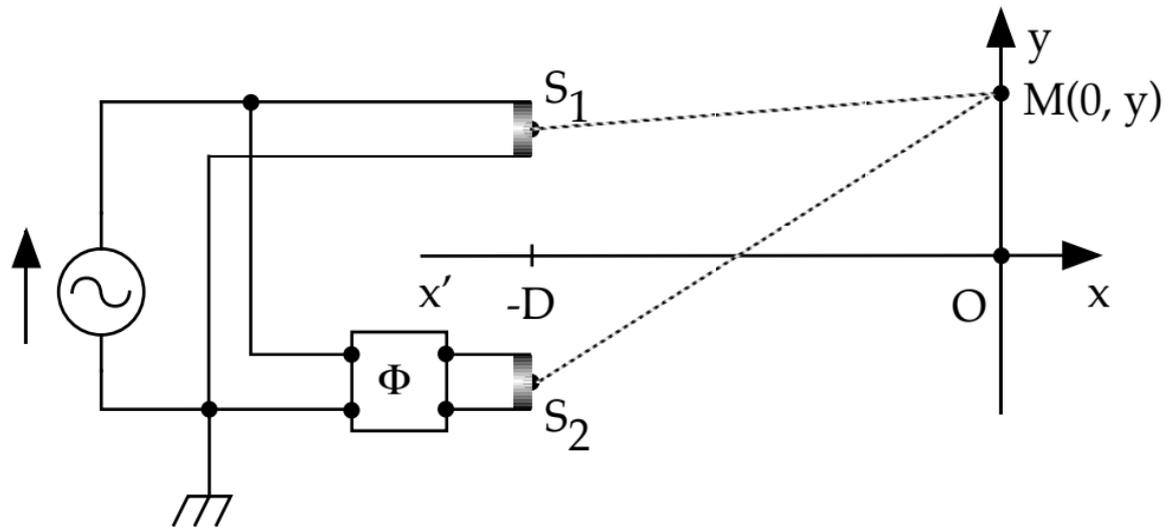
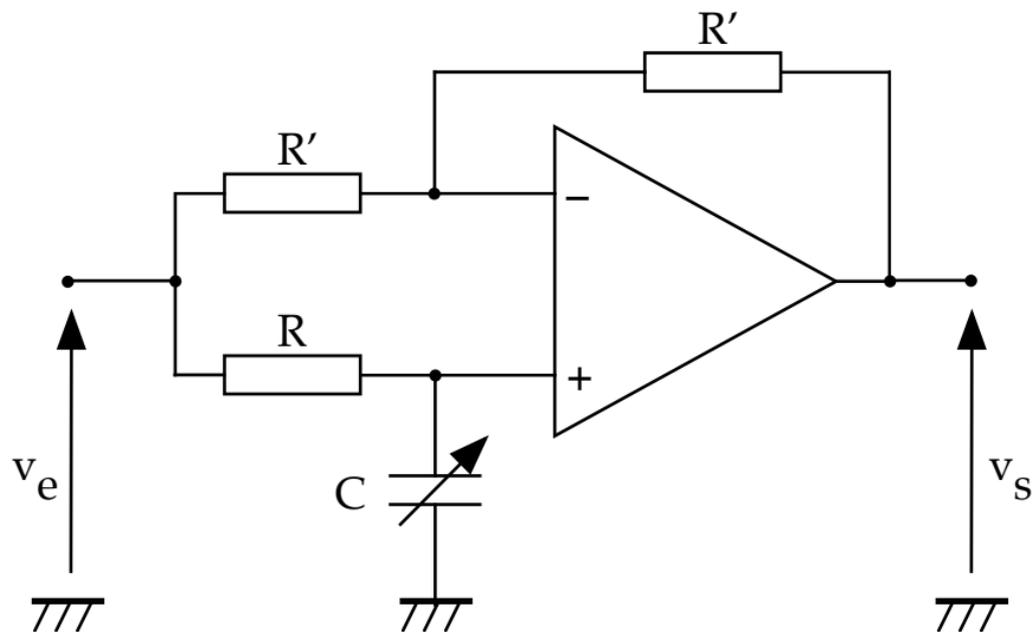


FIG. 19: *interférences avec des ondes ultrasonores.*

FIG. 20: *circuit déphaseur.*

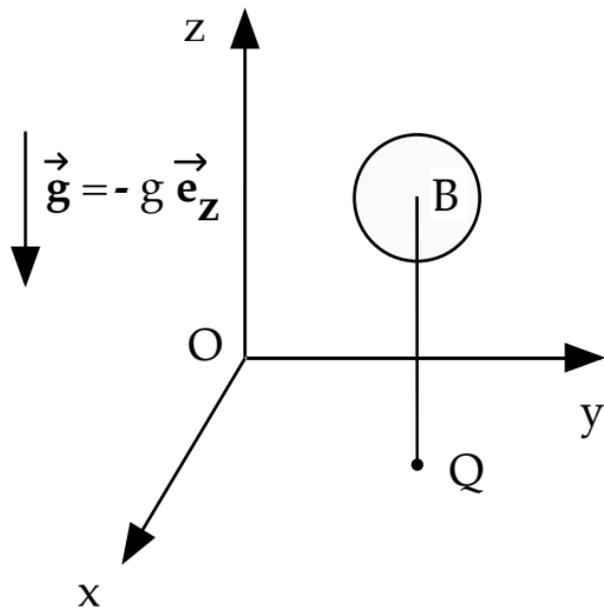


FIG. 21: la «bulle» de gaz.

# 1992 (incomplet)

## DEUXIEME PARTIE. MECANIQUE

### I. Mouvement d'un point matériel dans un champ newtonien



Cette partie est corrigée page 298.

On étudie le mouvement d'un satellite dans le champ gravitationnel terrestre. Ce satellite est considéré comme un objet ponctuel. La Terre est assimilée à une répartition sphérique de masse. On montre que

dans ces conditions son champ gravitationnel en un point extérieur est identique à celui que créerait une masse ponctuelle placée en son centre et égale à sa masse totale.

L'étude est menée dans le référentiel géocentrique lié au centre  $O$  de la Terre et en translation par rapport aux axes de Copernic<sup>9</sup>. Ce référentiel est considéré galiléen.

On ne tient compte que du champ gravitationnel terrestre.

On utilisera les valeurs numériques suivantes :

- masse de la Terre:  $M_T = 6,00 \cdot 10^{24}$  kg ;
- rayon de la Terre:  $R_T = 6\,400$  km ;
- constante de gravitation universelle:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  N m<sup>2</sup> kg<sup>-2</sup> ;
- durée du jour sidéral:  $T_0 = 86\,164$  s.

1. Donner l'expression du champ gravitationnel terrestre  $\vec{G}$  en un point  $M$  situé à la distance  $r > R_T$  du centre de la Terre.
2. Satellites circulaires.

---

9. Nicolas Copernic (Nicolaus Copernicus, 1473-1543)

On désire placer un satellite de masse  $m$  sur une orbite circulaire de rayon  $r$  dont le centre sera confondu avec le centre de la Terre.

- a. Montrer que le mouvement circulaire est nécessairement uniforme.
- b. Le satellite ayant atteint, au cours de la phase de lancement, un point  $M$  distant de  $r$  du centre  $O$  de la Terre, quelles caractéristiques doit-on donner à son vecteur vitesse pour le placer en ce point en orbite circulaire?
- c. Etablir l'expression de la période  $T$  du satellite en fonction du rayon de son orbite.
- d. Etablir l'expression de l'énergie  $E$  du satellite sur sa trajectoire circulaire en fonction du rayon de son orbite.
- e. Soit  $\lambda$  la latitude de la base de lancement et  $\Omega$  la vitesse de rotation de la Terre autour de l'axe de ses pôles. Quelle énergie faut-il communiquer au satellite pour le placer, depuis le sol, sur son orbite circulaire? Quel est l'intérêt d'une base équatoriale?
- f. *Application numérique* :  $r = 6\,600$  km ;  
Calculer la vitesse du satellite sur son orbite circulaire, ainsi que la période de son mouvement.

**g.** Satellites géostationnaires.

- Donner la définition d'un satellite géostationnaire.
- Est-il possible de placer un satellite géostationnaire à la verticale de Paris? Justifier la réponse.
- Calculer le rayon de l'orbite géostationnaire.
- Calculer la vitesse du satellite sur cette orbite.

**3.** Etude d'une orbite de transfert.

On désire faire passer le satellite précédent de l'orbite circulaire ( $\mathcal{O}_1$ ) de rayon  $r_1$  à l'orbite circulaire ( $\mathcal{O}_2$ ) de rayon  $r_2$  ( $r_2 > r_1$ ). Pour y parvenir, on lui fait emprunter une orbite de transfert elliptique ( $\mathcal{E}$ ), tangente en son périégée  $M_1$  à l'orbite ( $\mathcal{O}_1$ ) et en son apogée  $M_2$  à l'orbite ( $\mathcal{O}_2$ ). Les passages en  $M_1$  de l'orbite ( $\mathcal{O}_1$ ) à l'orbite ( $\mathcal{E}$ ) et en  $M_2$  de l'orbite ( $\mathcal{E}$ ) à l'orbite ( $\mathcal{O}_2$ ), sont effectués en fournissant au satellite, à l'aide de propulseurs, deux impulsions permettant d'augmenter respectivement son énergie de  $\Delta E_1$  et  $\Delta E_2$  (fig. 22).

On admettra que les relations donnant  $E$  et  $T$ , établies avec  $r$  pour des trajectoires circulaires, restent formellement valables ici, pour des trajectoires elliptiques de demi-grand axe  $a$  en remplaçant  $r$  par  $a$ .

**a.** Quel est le demi-grand axe de l'orbite de transfert?

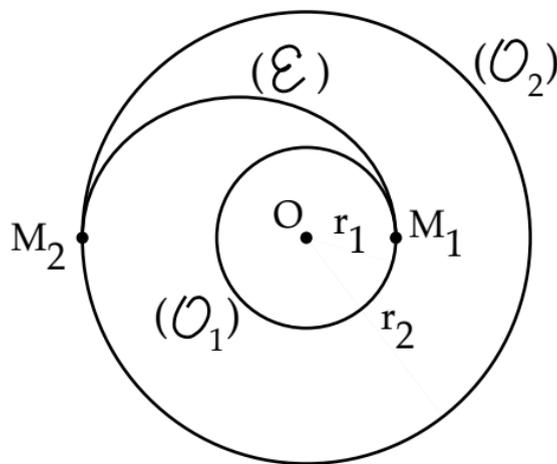


FIG. 22: l'orbite de transfert.

**b.** Quelles sont les énergies respectives du satellite sur les orbites  $(\mathcal{O}_1)$ ,  $(\mathcal{O}_2)$ ,  $(\mathcal{E})$ , en fonction de  $G$ ,  $M_T$ ,  $m$ ,  $r_1$  et  $r_2$ ?

**c.** Exprimer  $\Delta E_1$  et  $\Delta E_2$  en fonction des mêmes paramètres.

*Application numérique.* Calculer  $\Delta E_1$  et  $\Delta E_2$  :  $m = 100$  kg ;  $r_1 = 6\,600$  km ;  $r_2 = 42\,200$  km.

d. Calculer la durée du transfert de l'orbite ( $\mathcal{O}_1$ ) d'altitude 200 km, à l'orbite ( $\mathcal{O}_2$ ) d'altitude 35 800 km.

## II. Etude énergétique du mouvement d'un point matériel dans un champ newtonien



Cette partie est corrigée page 303.

(titre original complet : **II. Etude énergétique du mouvement d'un point matériel dans un champ newtonien attractif**)

Soit  $O$  un point fixe du référentiel d'étude galiléen ( $\mathcal{R}$ ).

On note  $r$  la distance à  $O$  d'un point  $M$  quelconque de l'espace et on pose

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}.$$

Une particule de dimensions négligeables, assimilée à un point matériel de masse  $m$  est animée dans ( $\mathcal{R}$ ) d'une vitesse  $\vec{v}$ . Elle subit en  $M$  la seule force

$$\vec{f} = -\frac{k}{r^2}\vec{u} \quad (k \text{ constante positive}).$$

1. Montrer que le moment cinétique en  $O$  du point matériel reste constant au cours du mouvement. En déduire que ce mouvement s'effectue dans un plan contenant le centre des forces  $O$ .

Dans la suite on aura intérêt à utiliser la base cylindrique  $(\vec{u}, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  définie de la façon suivante :

- $\vec{u}$  : vecteur unitaire de  $\overrightarrow{OM}$  ;
  - $\vec{u}_z$  : vecteur unitaire colinéaire au moment cinétique de la particule et de même sens ;
  - $\vec{u}_\theta$  : vecteur tel que  $(\vec{u}, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  soit orthonormée directe.
2. Montrer que la force  $\vec{f}$  dérive d'une énergie potentielle  $E_p$ . Etablir l'expression de cette énergie potentielle en la prenant par convention nulle à l'infini.
  3. Définir l'énergie mécanique du point matériel. Montrer que c'est une constante du mouvement.
  4. Soit  $Ox$  un axe cartésien du référentiel  $(\mathcal{R})$ . On repère la position  $M$  de la particule dans le plan de son mouvement par ses coordonnées polaires  $r$  et  $\theta = (Ox, \vec{u})$ .
    - a. On définit la constante des aires du mouvement de la particule par :  $C = r^2\dot{\theta}$ . Justifier le terme «constante».

b. Les conditions initiales du mouvement sont définies par :

$$r = r_0; \quad \theta = \theta_0; \quad \|\vec{v}\| = v_0; \quad (\vec{u}, \vec{v}_0) = \alpha_0.$$

Exprimer  $E$  et  $C$  en fonction de  $k$ ,  $m$ ,  $r_0$ ,  $v_0$  et  $\alpha_0$ .

c. Montrer que l'énergie mécanique de la particule peut se mettre sous la forme

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E'(r) \quad \text{avec} \quad E'(r) = -\frac{k}{r} + \frac{mC^2}{2r^2}.$$

d. Montrer que la fonction  $E'(r)$  admet un minimum  $E'_m$  pour  $r = r_m$ . Exprimer  $E'_m$  et  $r_m$  en fonction de  $k$ ,  $m$ ,  $r_0$ ,  $v_0$  et  $\alpha_0$ .

Tracer l'allure du graphe  $E'(r)$ .

e. Définir la condition que doit satisfaire  $E$  pour que le point matériel reste prisonnier du centre des forces.

f. Quelle est, en fonction de  $k$ ,  $m$ ,  $r_0$ , la valeur minimale  $v_{0m}$  de  $v_0$  pour que le point matériel échappe au centre des forces?

g. Quelle est la nature du mouvement lorsque  $E = E'_m$ ?

## TROISIEME PARTIE. OPTIQUE

### I. ETUDE D'UN APPAREIL PHOTOGRAPHIQUE.

L'objectif d'un appareil photo est modélisé par une lentille mince convergente de distance focale  $f'$ , accolée à un diaphragme circulaire de diamètre  $D$ . Les axes de la lentille et du diaphragme sont confondus et  $f'$  est égale à 50 mm. La lentille est utilisée dans les conditions de Gauss. On définit le **nombre d'ouverture**  $N$  par le rapport  $N = f'/D$ .

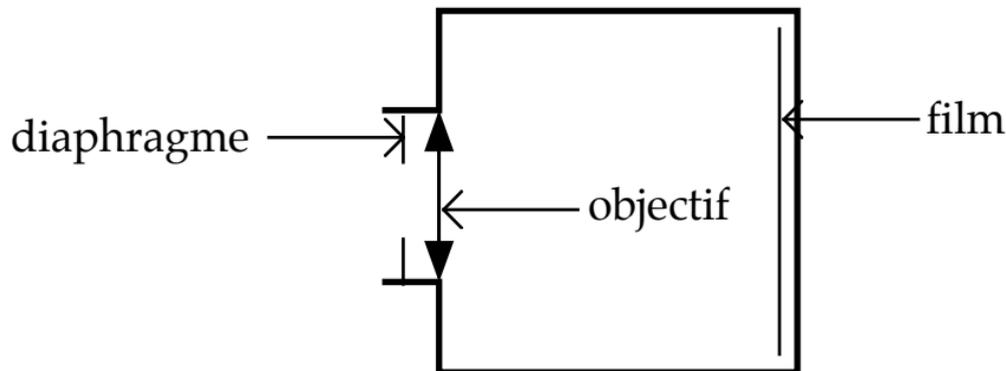


FIG. 23: *l'appareil photo.*

1. Énoncer les conditions de Gauss.
2. La mise au point étant faite à l'infini, quelle est la distance de l'objectif au plan du film ?
3. La distance minimale de mise au point parfaite étant de 60 cm, calculer dans ces conditions la distance de l'objectif au plan du film. Commenter le résultat.

4. Notion de profondeur de champ.

L'objectif est mis au point sur l'infini. A tout point de l'axe correspond alors sur la pellicule une tache. Compte tenu du grain de la pellicule et de l'acuité visuelle, il y a netteté apparente si le diamètre de cette tache est inférieur ou égal à  $\delta$ .

On note  $A_1$  le point de l'axe le plus proche de l'objectif pour lequel ce critère de netteté apparente est satisfait.

- a. Représenter sur une figure le point  $A_1$  et son image  $A'_1$ , ainsi que les grandeurs  $D$  et  $\delta$ .
- b. Calculer la distance  $p_1$  du point  $A_1$  à l'objectif en fonction de  $N$ ,  $f'$  et  $\delta$  et commenter le résultat.
- c. *Application numérique*:  $\delta = 30 \mu\text{m}$ .

Calculer  $p_1$  pour  $N = 2,8$  et  $N = 16$ .

5. La tache centrale de diffraction donnée par une ouverture circulaire de diamètre  $D$  a pour rayon angulaire  $\alpha = 1,22\lambda/D$ . Quelle condition doit respecter le nombre d'ouverture de l'objectif de 50 mm de focale pour que la netteté ne soit pas limitée par la diffraction?

Faire l'application numérique pour  $\delta = 30 \mu\text{m}$  et  $\delta = 10 \mu\text{m}$  (on prendra  $\lambda = 0,6 \mu\text{m}$ ). Conclusion?

6. On s'intéresse dans cette question aux valeurs pouvant être données à certains paramètres.

a. Les nombres d'ouverture disponibles au niveau de l'objectif sont : 1,8 - 2,8 - 4 - 5,6 - 8 - 11 - 16 - 22.

Quelle remarque peut-on faire et pourquoi ce choix?

b. Les vitesses d'obturation disponibles, au niveau de l'appareil, sont, en secondes : 1/1000 - 1/500 - 1/250 - 1/125 - 1/60 - 1/30 - 1/15 - 1/8 - 1/4 - 1/2 - 1 - 2.

Quelle remarque peut-on faire à propos de ce choix?

c. Le photographe désire diminuer la profondeur de champ tout en conservant la même exposition à sa photographie. Comment doit-il opérer?

## II. INTERFERENCES LUMINEUSES

On envisage le dispositif interférentiel des trous d'Young.

Une source  $S$ , de dimensions suffisamment petites pour pouvoir être considérée comme ponctuelle, éclaire un écran opaque percé de deux trous  $S_1$  et  $S_2$ , également de faibles dimensions, distants l'un de l'autre de  $a$ .

On note  $O'$  le milieu du segment  $S_1S_2$  et  $O'z$  l'axe normal en  $O'$  au plan opaque.

La source  $S$  se trouve au point  $O''$  de l'axe  $O'z$ , à une distance  $d$  en amont du point  $O'$ . Le phénomène d'interférence est observé sur un écran ( $E$ ) placé normalement à l'axe  $O'z$  à une distance  $D$  en aval du point  $O'$ .

L'espace est rapporté au repère cartésien  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  défini de la façon suivante :

- $O$  : point de l'écran appartenant à l'axe  $O'z$  ;
- $\vec{u}_z$  : vecteur unitaire de l'axe  $O'z$ , orienté du point  $O'$  vers l'écran ;
- $\vec{u}_x$  : vecteur unitaire parallèle à  $S_1S_2$ , orienté de  $S_2$  vers  $S_1$  ;
- $\vec{u}_y$  : vecteur unitaire tel que la base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  soit orthonormée directe.

On utilisera les valeurs numériques suivantes :

$$a = 1,2 \text{ mm} \quad D = 2,00 \text{ m} \quad d = 40 \text{ cm.}$$

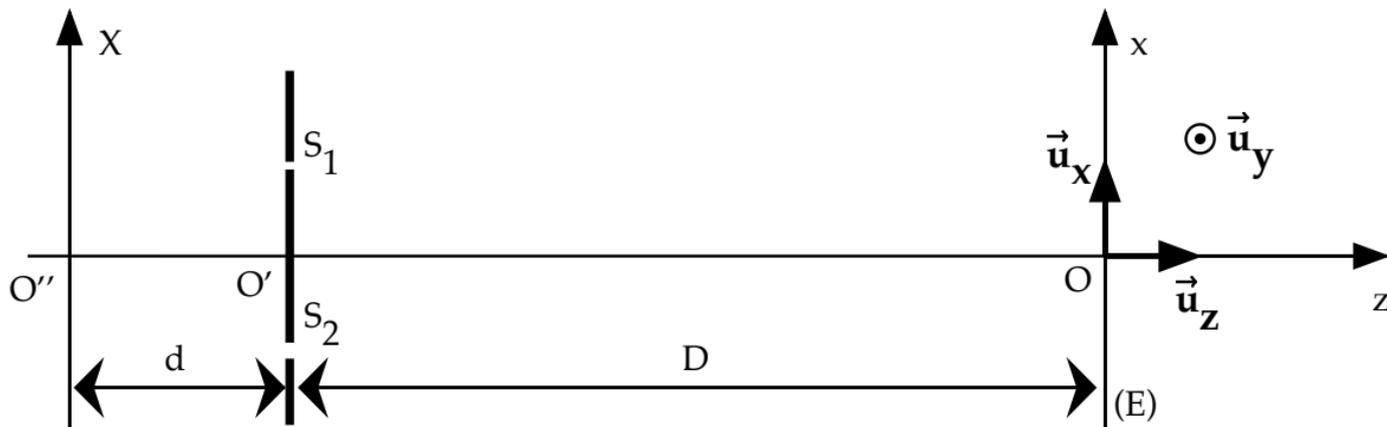


FIG. 24: le dispositif des trous d'Young.

1. Le champ d'interférences est la région de l'espace où est observé le phénomène d'interférence.
  - a. L'optique géométrique ne permet pas de prévoir l'existence d'un champ d'interférences en ce qui concerne le dispositif des trous d'Young. Pour quelle raison? A quel phénomène physique doit-on faire appel pour en comprendre l'existence?
  - b. Représenter sur un schéma le champ d'interférences.

2. Soit  $M(x, y, 0)$  un point quelconque de l'écran ( $E$ ).
  - a. Définir la différence de marche  $\delta(M)$  entre les trajets des ondes parvenant en  $M$  et provenant de  $S_1$  et  $S_2$ .
  - b. Etablir les expressions des distances  $S_1M$  et  $S_2M$  en fonction de  $x$ ,  $y$ ,  $a$  et  $D$ .
  - c. Sachant que dans le dispositif des trous d'Young  $x$ ,  $y$  et  $a$  sont faibles devant  $D$ , en déduire l'expression approchée de la différence de marche  $\delta(M) = ax/D$ .
3. La source  $S$  est une source monochromatique émettant une radiation de longueur d'onde  $\lambda$ .
  - a. Définir le lieu des points de l'écran où l'intensité lumineuse est maximale.
  - b. Définir le lieu des points de l'écran où l'intensité lumineuse est minimale.
  - c. Décrire la figure d'interférences. Définir et exprimer son interfrange.
4.  $S$  est maintenant une source de lumière blanche émettant dans tout le domaine du spectre visible :  $\lambda \in [400 \text{ nm}, 750 \text{ nm}]$ .

- a.** Décrire la figure d'interférences observée sur l'écran.
- b.** A la distance  $x = 8,5$  mm du centre de la figure d'interférences, on place la fente d'un spectroscopie.
- Décrire le spectre observé.
  - Calculer les longueurs d'onde des radiations non observées.

# 1993

## Première partie. L'Arc-en-Ciel

Au cours de ce problème, on va étudier quelques phénomènes naturels.

### A. Modélisation optique

#### I. Etude géométrique

*L'étude de l'arc-en-ciel commence par le calcul de la déviation de la lumière — supposée ici monochromatique — dans une goutte d'eau sphérique. Le document n°1 (à rendre complété avec la copie) indique la coupe d'une goutte d'eau et dans le plan méridien le rayon incident  $S$ .*

**I.1.** Rappeler les lois de Snell<sup>10</sup>-Descartes<sup>11</sup> pour la réflexion puis la réfraction pour deux milieux d'indices absolus respectifs  $n_1$  et  $n_2$ .

**I.2.** A l'aide des figures 25 et 26, donner l'expression de l'angle de déviation  $D$ , en fonction de  $i$  pour la réflexion, et en fonction de  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $n_1$  et  $n_2$  pour la réfraction.

**I.3.a.** On trace, dans cette question, à la surface du dioptre sphérique, pour le rayon incident  $S$ , le rayon réfracté  $R_1$  dans la goutte d'eau. Compléter le document n°1. (Le rayon réfléchi en  $M$  ne sera pas tracé.)



Le document n°1 est corrigée page 309.

**I.3.b.** Le rayon  $R_1$  arrive en  $N$  à la surface interne du dioptre. Compléter le document n°1 et commenter brièvement.

---

10. Willebrord Snell van Royen dit Willebrordus Snellius (1580-1626)

11. René du Perron Descartes (1596-1650)

**I.3.c.** Déterminer la déviation  $D$  pour le rayon sorti de la goutte après avoir subi une réflexion interne. On exprimera  $D$  en fonction de  $i$  et de  $n$ .

**I.3.d.** Montrer que la déviation  $D$  passe par un extremum  $D_m$  pour une valeur  $i_m$  de  $i$ . Montrer que  $D_m$  est un minimum dans le cas où  $n = 4/3$ .

Calculer  $D_m$  pour  $n = 4/3$ .

La hauteur d'incidence est la distance qui sépare le rayon incident d'un axe parallèle passant par le centre de la goutte (on pourrait l'appeler également par analogie paramètre d'impact). Calculer la hauteur d'incidence en fonction du rayon de la goutte au minimum de déviation.

*Le modèle de l'arc-en-ciel est introduit à partir du concept de goutte d'eau sphérique de rayon  $R$  et d'indice  $n$ , recevant des rayons lumineux provenant du Soleil supposé ponctuel et à l'infini. Le rayon lumineux pénètre dans la goutte, y subit une réflexion interne et en ressort.*

**I.4.** Etude qualitative

**I.4.a.** Pourquoi observe-t-on toujours un cercle ou un arc de cercle? On s'aidera du schéma de situation ci-dessous pour se rendre compte de la symétrie du phénomène.

**I.4.b.** Pourquoi l'observation du phénomène est-elle difficile ou impossible à midi?

**I.4.c.** Deux observateurs distants de quelques mètres voient-ils la même image du phénomène?

**I.5.** Imaginer un dispositif simple à monter au lycée (en laboratoire) pour sensibiliser les élèves au phénomène.

## II. Etude de la dispersion

*On travaille en lumière blanche dans la partie II.*

**II.1.** Quelle est l'étendue du spectre visible dans le domaine des longueurs d'onde?

**II.2.** Pourquoi observe-t-on des couleurs dans l'arc-en-ciel?

**II.3.** Montrer que la déviation minimale croît avec l'indice  $n$  de la goutte et estimer la variation de la déviation  $\Delta D$  pour une variation d'indice  $\Delta n = 0,01$ . On peut considérer que l'incidence  $i$  correspondant à la déviation minimale est sensiblement constante pour l'ensemble du spectre visible.

**II.4.** En posant

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2}, \quad A \text{ et } B \text{ étant positifs,} \quad (20)$$

indiquer, du violet ou du rouge, la couleur qui est la plus déviée. Pour cela, on calculera les variations de  $\alpha$ , où  $\alpha$  est l'inclinaison des rayons issus du sommet de l'arc pour l'observateur terrestre.

**II.5.** Imaginer un dispositif simple à monter au lycée (au laboratoire ou en plein air) pour présenter un phénomène analogue.

## B. Etude de la goutte d'eau

*Valeurs numériques et relations pouvant être utiles à la résolution du problème.*

- Accélération due à la pesanteur :  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$  ;
- Constante molaire des gaz parfaits :  $R = 8,31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$  ;
- Masse molaire de l'air :  $M = 29,0 \text{ g mol}^{-1}$  ;
- Rapport des capacités calorifiques molaires à pression et à volume constant de l'air :  $\gamma = C_p/C_v = 1,40$ .

La forme et la taille de la goutte sont deux éléments déterminants dans l'observation du phénomène de l'arc-en-ciel.

## I. Formation des gouttes

L'état de surface libre de l'eau dans l'atmosphère dépend de deux variables indépendantes : la température  $T$  et la surface libre  $s$  du liquide.

Au cours d'une transformation infinitésimale réversible qui augmente la température de  $dT$  et la surface libre de la goutte de  $ds$ , il faut fournir respectivement une quantité de chaleur

$$\delta Q = cdT + kds$$

et un travail

$$\delta W = Ads.$$

$A$ , fonction de la seule température ( $A = aT + b$ , avec  $a$  et  $b$  constantes), désigne la « constante » de tension superficielle du liquide.

Pour l'eau,

$$A = 0,070 \text{ N m}^{-1} \text{ à } 27^\circ\text{C},$$

$$A = 0,068 \text{ N m}^{-1} \text{ à } 47^\circ\text{C}.$$

1. Énoncer le premier principe de la thermodynamique ; exprimer la différentielle  $dU$  de l'énergie interne. Comment peut-on appeler  $c$  et  $k$  ?

2. Énoncer le deuxième principe de la thermodynamique. Exprimer la différentielle de l'entropie.

3. Exprimer  $k$  en fonction de  $T$  et de  $dA/dT$  en partant des relations qui donnent  $dU$  et  $dS$ .

## II. Etude de l'accroissement de la taille d'une goutte d'eau.

On peut modéliser le processus en admettant que les gouttes tombent verticalement dans un champ de pesanteur uniforme à partir du point  $O$ , suivant un axe  $Oz$  dirigé vers le bas, avec une vitesse  $v = dz/dt$  à travers un nuage de gouttelettes immobiles : celles-ci s'agrègent à la goutte en chute et accroissent ainsi sa masse  $m$ .

Le taux d'accroissement vaut  $dm/dt = kmv$  ; ( $k > 0$ ).

1. En quelle unité S.I. s'exprime  $k$  ?

2. Calculer l'accroissement de la quantité de mouvement entre les instants  $t$  et  $t + dt$  par deux méthodes différentes ; établir l'équation différentielle qui relie  $v$ ,  $t$  et les constantes du problème.

3. En déduire la relation entre la vitesse  $v$  et la distance parcourue  $z$  ; on prendra  $v = 0$  pour  $t = 0$ .

*Application numérique* :  $z = 1$  km et  $k = 5 \cdot 10^{-4}$  S.I. Calculer  $v$ .

Ainsi, la chute rapide des grosses gouttes (diamètre de l'ordre du micromètre) est responsable du phénomène de l'arc-en-ciel. D'ailleurs, on constate un contraste entre le haut et le bas du nuage, où les gouttes ont eu le temps de grossir.

4. Après avoir atteint  $50 \text{ m s}^{-1}$ , la chute se poursuit à vitesse constante. En admettant que la chaleur produite par le frottement de l'air chauffe la goutte, calculer l'élévation de température au bout de 1 km de chute.

Chaleur massique de l'eau :  $4180 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ .

## C. Analogie avec l'arc-en-ciel atomique

*Un arc-en-ciel atomique est observé lors d'une collision entre deux atomes dans un gaz : lorsque des atomes éloignés se rapprochent, ils sont d'abord soumis à une attraction qui croît régulièrement puis, à plus faible distance, les nuages électroniques commencent à s'interpénétrer, les forces d'attraction diminuent et se transforment en forces répulsives.*

*Egalement, l'interaction particule  $\alpha$  / noyau-cible d'or, peut correspondre à la même approche. Par ailleurs, elle a été au départ de la technique du moment cinétique appliqué à l'arc-en-ciel optique, mise au point par Poincaré et parachevée il y a tout juste 20 ans.*

## Diffraction d'une particule alpha par un noyau d'or



Cette partie est corrigée page 310.

On étudie dans un référentiel galiléen associé à un noyau d'or considéré comme cible, de masse  $M$  et de charge  $Q = Ze$ , le mouvement d'une particule  $\alpha$ , charge ponctuelle  $q$  de masse  $m$ , qui sera soumise à la seule force coulombienne. La position de la particule est repérée par  $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$ , et sa vitesse  $\vec{v} = d\overrightarrow{OM}/dt$ ;  $O$ , centre des forces, sera sur la cible.

1. Qu'appelle-t-on particule  $\alpha$ ?
2. Montrer qualitativement qu'il est légitime de négliger les forces gravitationnelles vis-à-vis des forces coulombiennes.
3. En comparant qualitativement  $m$  et  $M$ , justifier l'approximation consistant à traiter le problème comme si la cible est immobile.
4. Montrer que  $\vec{\sigma}$ , le moment cinétique en  $O$  de la particule  $\alpha$ , est une constante du mouvement. En conclure que le mouvement sera plan. Préciser ce plan.

5. Dans le plan de la trajectoire, on repère le point  $M$  par ses coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$ .  
Montrer que  $r^2\dot{\theta} = C$ ;  $C$  constante.
6. Montrer que l'énergie mécanique  $E_m$  est aussi une constante du mouvement.
7. Exprimer  $E_m$  en fonction de  $\sigma$ ,  $m$ ,  $r$ ,  $\dot{r}$  et  $E_p$ ;  $E_p$  énergie potentielle.
8. Sachant que les forces appliquées s'écrivent  $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$ , calculer  $\vec{F}$  en fonction de  $\sigma$ ,  $m$ ,  $u$  et de la dérivée seconde de  $u = \frac{1}{r}$  par rapport à  $\theta$ , la relation obtenue s'appelant *formule de Binet*.
9. En explicitant  $\vec{F}$ , former l'équation différentielle satisfaite par  $u(\theta)$  et en déduire que, dans le cas de la diffusion coulombienne, la particule décrit une hyperbole répondant à l'équation en coordonnées polaires

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + pA \cos(\theta - \beta)}. \quad (21)$$

Expliciter  $p$ ,  $A$ ,  $\beta$ .

## Deuxième Partie. Electricité dans l'Atmosphère

### A. Etude de décharges électriques



Cette partie est corrigée page 316.

Pour mesurer les tensions importantes qui peuvent prendre naissance lors d'un phénomène météorologique on peut avoir recours au dispositif de la figure 29, simplification de l'électromètre d'Abraham<sup>12</sup>.

Ce dispositif comporte essentiellement un plateau ( $P$ ) circulaire, de surface  $S$  sur l'axe duquel est soudée d'un seul côté une tige ( $T$ ); la tige est constamment maintenue horizontale grâce à une suspension bifilaire ( $O_1, b_1, O_2, b_2$ ); les barres  $b_1$  et  $b_2$  sont constamment dans un même plan vertical — celui de la figure —, et leur longueur commune est  $l_0$ . La masse de cet équipage mobile est  $m$ .

On met en regard du plateau ( $P$ ) un plateau ( $P_0$ ) qui est à la terre. Lorsque l'équipage mobile est également au potentiel nul,  $b_1$  et  $b_2$  sont verticales et la distance ( $P$ ) — ( $P_0$ ) vaut  $e_0$ .

Si l'on soumet l'équipage mobile à un potentiel  $V$ , il se déplace sous l'effet d'actions électrostatiques que l'on considérera comme situées exclusivement sur ( $P$ ). Le champ électrostatique régnant entre ( $P$ ) et ( $P_0$ ) est supposé être celui qui y règnerait s'il n'y avait pas d'effets de bord.

---

12. [Henri Abraham \(1875-1922\)](#)

1.  $V$  étant donné et  $\theta$  supposé connu, quelle est l'expression de la force  $F$  qui s'exerce sur le plateau ( $P$ ) en fonction de  $\epsilon_0$ ,  $V$ ,  $S$ ,  $e_0$ ,  $l_0$  et  $\theta$ ?
2. En déduire l'équation qui donne la valeur de  $\theta$  à l'équilibre en fonction des paramètres  $\epsilon_0$ ,  $V$ ,  $S$ ,  $e_0$ ,  $l_0$ ,  $m$  et  $g$ .
3. On suppose que  $V$  soit suffisamment «faible» pour que  $\theta \ll 1$ . Donner dans ce cas une expression approchée de  $\theta$  en fonction des mêmes paramètres.
4. On prend  $S = 10^{-2} \text{ m}^2$ ,  $e_0 = 10^{-1} \text{ m}$ ,  $l_0 = 1 \text{ m}$ ,  $m = 1 \text{ kg}$ ,  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ .
  - 4.a. Quelle est la valeur maximale que pourrait prendre  $\theta$ ?
  - 4.b. On considère que l'appareil ne peut fonctionner que si  $\theta$  ne dépasse pas la moitié de cette valeur maximale. A quelle tension maximale mesurable  $V_{max}$  ceci correspond-il?

## B. Le tonnerre

Le tonnerre qui accompagne la foudre se propage dans l'air considéré comme un milieu compressible et illimité. L'onde acoustique définie sera plane et correspondra à la propagation de la perturbation touchant la pression  $P$ , la masse volumique  $R$  et la vitesse  $v$  d'une tranche de gaz. On écrira

$$P = P_0 + p(x, t), \quad R = \rho_0 + \rho(x, t), \quad v = 0 + v(x, t), \quad (22)$$

$p(x, t)$  et  $\rho(x, t)$  étant considérés comme très petits devant respectivement  $P$  et  $\rho_0$ . Ainsi, par exemple, pour  $P_0$  voisin de 1 bar, les surpressions  $p(x, t)$  ne dépassent pas quelques dizaines de pascals.

1. Qu'appelle-t-on ondes planes longitudinales?
2. A partir de la relation d'Euler<sup>13</sup> qui s'écrit simplement dans le cas considéré

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{R} \overrightarrow{\text{grad}} P \quad (23)$$

donner la relation (24) qui relie  $\partial v / \partial t$  et  $\partial p / \partial x$ .

---

13. Leonhard Euler (1707-1783)

**3.** Pour une transformation isentropique — cas du son dans l'air — on définit le coefficient de compressibilité isentropique — supposé constant — :

$$\chi_s = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_s ; \quad (25)$$

montrer que

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0 \chi_s} \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (26)$$

**4.** La conservation de la masse se traduit par

$$\mathbf{div}(R\vec{v}) + \frac{\partial R}{\partial t} = 0. \quad (27)$$

Etablir l'équation différentielle de la propagation.

**5.** A partir de la relation de Laplace  $PV^\gamma = \text{constante}$ , valable pour une transformation isentropique, calculer la célérité du son dans l'air à 27 °C. On prendra pour l'air

$$\begin{aligned} \gamma &= 1,40 ; \\ R &= 8,31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} ; \\ M &= 29,0 \text{ g mol}^{-1}. \end{aligned} \quad (28)$$

L'intervalle de temps qui sépare l'apparition de la foudre de la perception du tonnerre est de 10 s ; à quelle distance approximative de l'observateur est tombée la foudre ?

## C. Fluctuations du champ magnétique terrestre

Au cours de ces phénomènes atmosphériques, des fluctuations du champ magnétique terrestre peuvent être décelées ; la mesure de ces variations peut se faire à partir d'une sorte de pont de Wheatstone<sup>14</sup> (figure 30), dont l'un des résistors a une résistance qui dépend du champ.

**1.** Énoncer le théorème de Thévenin<sup>15</sup>. Déterminer  $V_{AB} = V_A - V_B$  en fonction de  $R_1, R_2, R_3, R_4$  et  $e(t)$ , f.é.m alternative sinusoïdale. Quand dit-on que le pont est équilibré ? Quelle est alors la relation entre les  $R_i$  ?

**2.** On considère le cas où  $R_2 = R_3 = R_4 = r$  et  $R_1 = r(1 + aB)$ . Les composantes permanentes du champ magnétique terrestre étant compensées par un dispositif approprié, donner l'expression de  $V_{AB}$

---

14. Sir Charles Wheatstone (1802-1875)

15. Léon Thévenin (1857-1926)

en fonction du champ  $B$  qui a pris naissance. On prendra

$$\begin{aligned} a &= 10^4 \text{ T}^{-1}; \\ V_{AB} &= 0,1 \text{ mV}; \\ e_{max} &= 1 \text{ V}. \end{aligned} \tag{29}$$

**3.** Pour déceler  $V_{AB}$ , il faut au préalable l'amplifier. Pour cela, on place aux bornes  $A$  et  $B$  le primaire d'un transformateur parfait (figure 31).

Préciser en quelques lignes le principe sur lequel il se fonde, ainsi que les relations entre grandeurs d'entrée et de sortie, le secondaire débitant dans une charge. Quelles sont les principales applications des transformateurs?

**4.** L'amplification du signal est assurée par un amplificateur opérationnel idéal (figure 32). Déterminer la relation entre  $v_s$  et  $V_C - V_D$ , puis  $v_s$  et  $B$ .

## Troisième Partie. Le Soleil

Le texte ci-dessous est adapté du mensuel «La Recherche» d'Avril 1991. Faites-en une lecture attentive pour répondre aux questions qui suivent :

« Le cœur du Soleil est une centrale nucléaire qui délivre une quantité fabuleuse d'énergie ( $3,86 \times 10^{26}$  W). Dans cet environnement, les protons fusionnent pour créer un noyau de deutérium en produisant un positron et un neutrino. le deutérium sert de base à l'édification de noyaux plus massifs.

« Nous avons en fait trois cycles différents auxquels nous avons assigné les chiffres I, II et III.

« Le premier cycle est le plus important : deux protons fusionnent pour fabriquer un deutérium en émettant un neutrino et un positron. Le deutérium peut se transformer en  $^3\text{He}$  en capturant un proton. Lorsque deux  $^3\text{He}$  ont été formés, ils peuvent fusionner en un  $^4\text{He}$  en relâchant deux protons. Mais il peut arriver que les deux isotopes de l'hélium fusionnent pour donner un isotope du béryllium, le  $^7\text{Be}$ . A partir de là s'ouvrent deux possibilités. En général, le  $^7\text{Be}$  va capturer un électron et se transformer en lithium  $^7\text{Li}$  en émettant un neutrino.

« Le deuxième cycle va se terminer lorsque le lithium va capturer un proton pour donner deux  $^4\text{He}$ . Il reste un troisième cycle, plus rare, mais important pour l'observation des neutrinos : si au lieu de capturer un électron, le  $^7\text{Be}$  capture un proton, il se transforme immédiatement en un état excité du béryllium, en émettant un neutrino. Le troisième cycle se termine par la désintégration du  $^8\text{Be}$  en deux  $^4\text{He}$ .

« Pour la détection des neutrinos, il suffit d'utiliser la réaction de la transformation d'un isotope du chlore,  $^{37}\text{Cl}$ , en un isotope radioactif de l'argon,  $^{37}\text{Ar}$ . »

**1.** Qu'est-ce qu'un positron, un neutrino?

Regrouper en un tableau la chaîne de réactions pour les trois cycles.

A quelle perte de masse par seconde correspond l'énergie délivrée par le Soleil?

Ecrire la réaction de passage du chlore  $^{37}\text{Cl}$  à l'argon  $^{37}\text{Ar}$ . On donne :

$$\begin{aligned} X &= [M(^{37}\text{Cl}) - M(^{37}\text{Ar}) - m(e^-)] c^2 &= & -1 \text{ MeV} ; \\ m(e^-) &= & 0,5 \text{ MeV} ; \\ \text{énergie du neutrino } T(\nu) &= & 1,4 \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (30)$$

En supposant que l'énergie cinétique de Ar soit négligeable (devant celle de l'électron), calculer l'énergie cinétique  $T(e^-)$  de l'électron.

Dans le cas où l'électron est émis dans une direction opposée à celle du neutrino incident, déterminer la direction et la grandeur de l'impulsion de  $^{37}\text{Ar}$ .

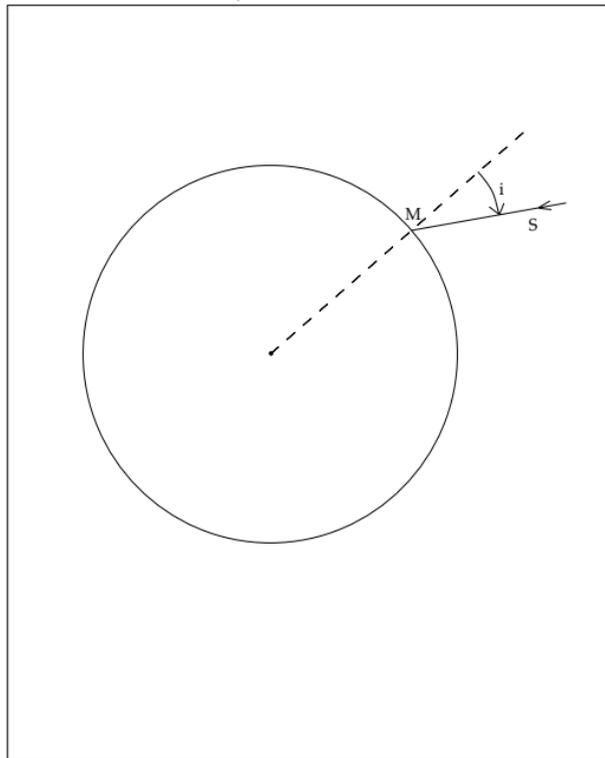
**2.** Donner les ordres de grandeur de la distance Soleil–Terre, les températures à la surface et dans le noyau du Soleil.

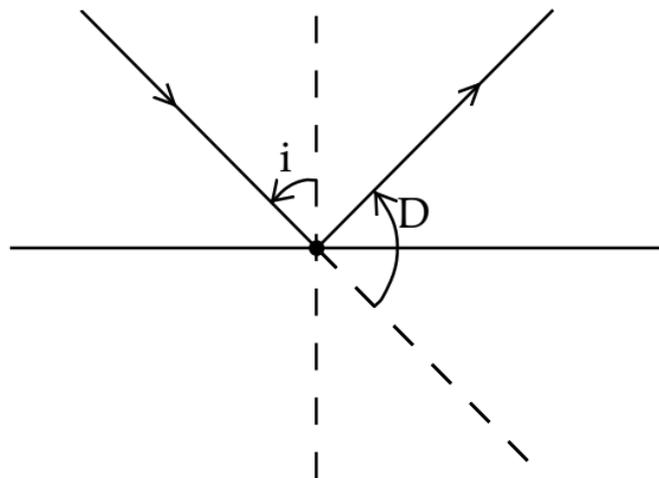
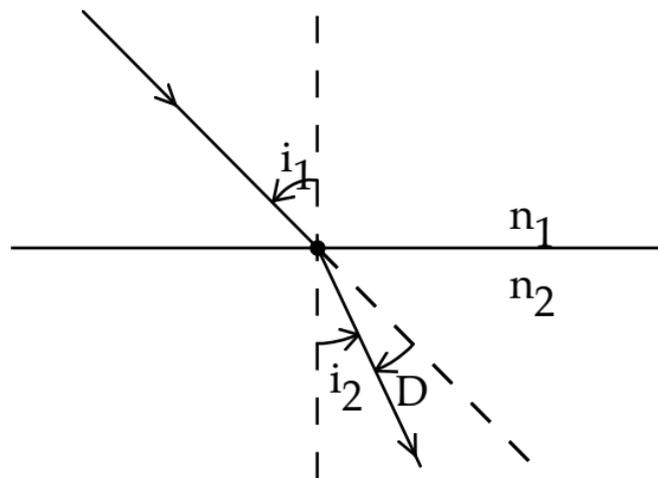
Montrer que la période et le rayon de l'orbite terrestre, par l'intermédiaire de la troisième loi de Képler<sup>16</sup>, permettent de trouver la masse du Soleil. Donnez-en un ordre de grandeur.

---

16. Johannes Kepler (1571-1630)

DOCUMENT n°1 (Feuille à rendre avec la copie)



FIG. 25: *déviatiun pour la réflexion.*FIG. 26: *déviatiun pour la réfractiun.*

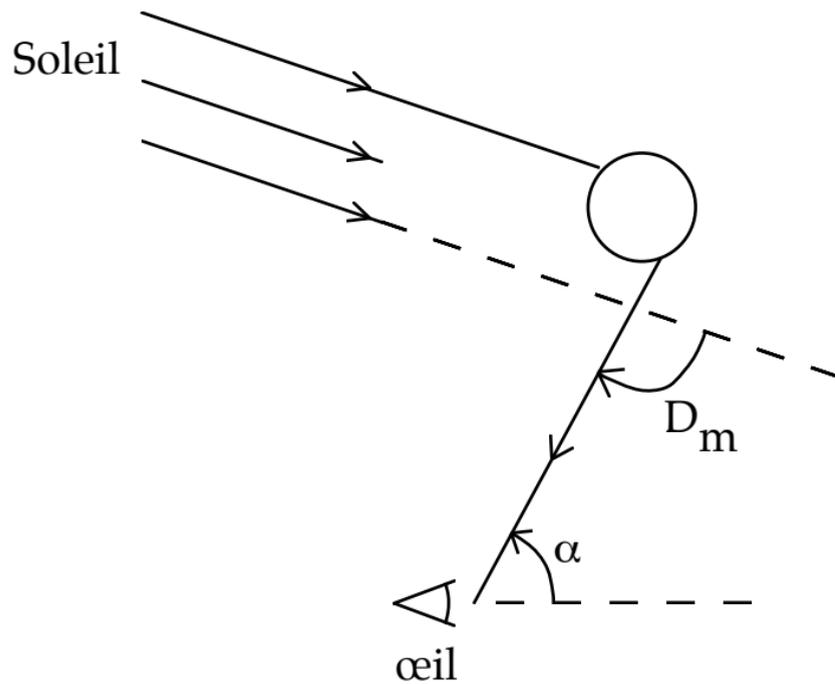
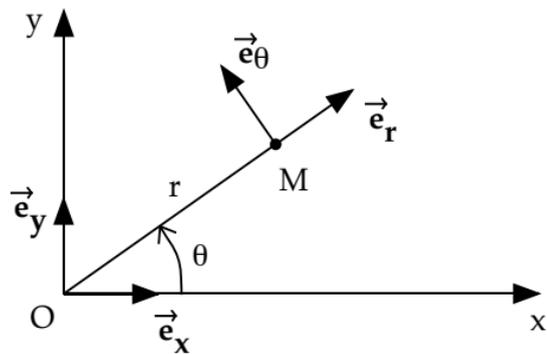
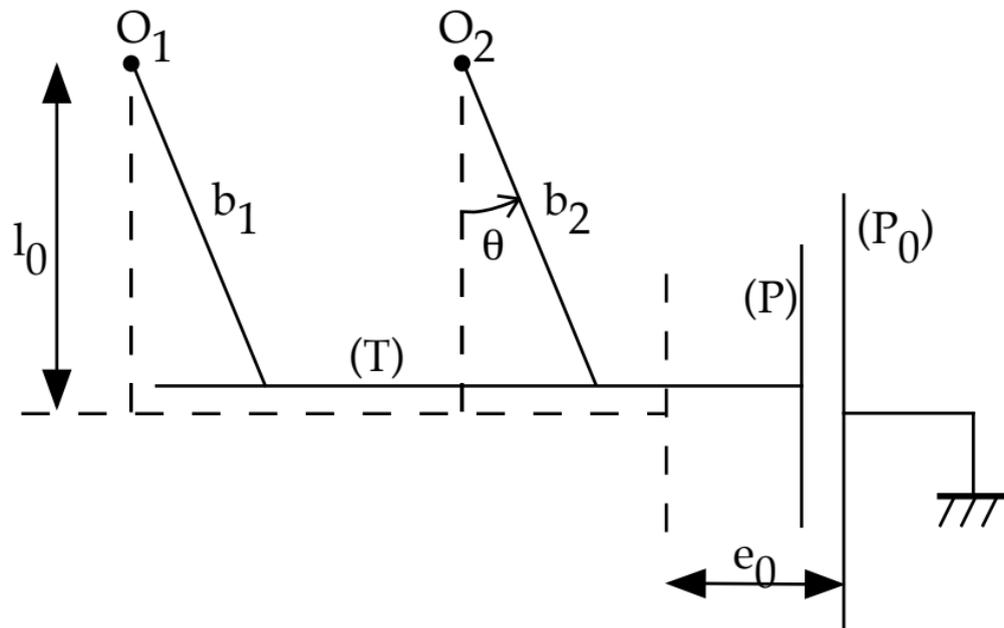


FIG. 27: schéma de situation.

FIG. 28: *coordonnées polaires.*

FIG. 29: *l'électromètre.*

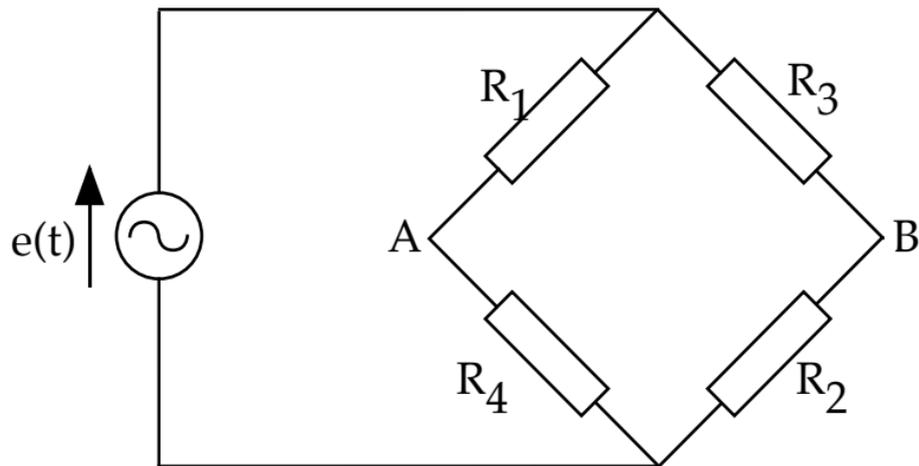
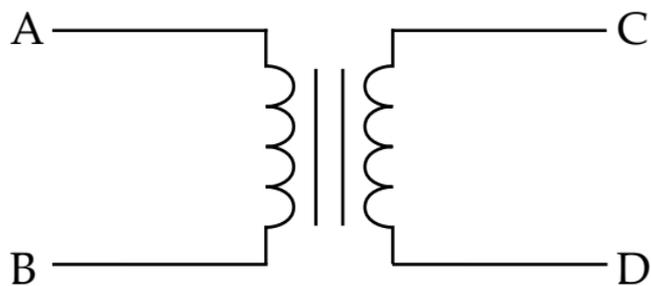
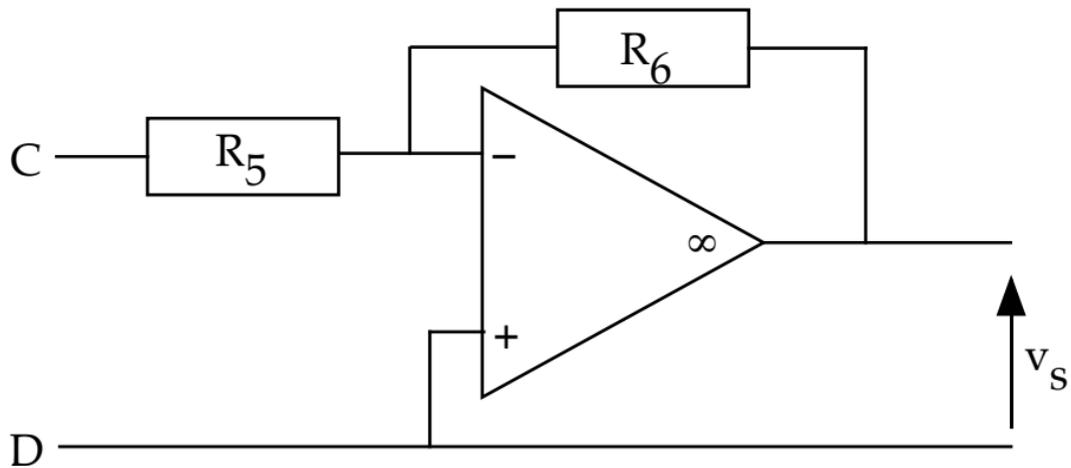


FIG. 30: *le pont de Wheatstone.*

FIG. 31: *le transformateur.*

FIG. 32: *l'amplificateur.*

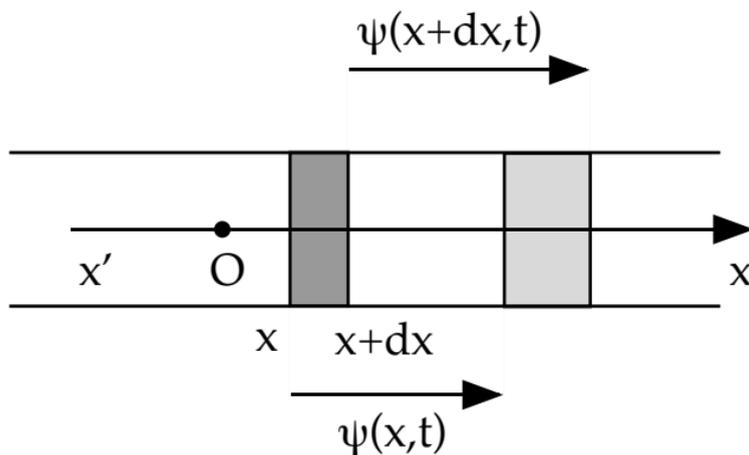
# 1994 (incomplet)

## 2EME PARTIE. PROPAGATION D'ONDES ACOUSTIQUES

On supposera que les parois des différents tuyaux, qui interviennent tout au long de cette partie, n'exercent aucun frottement sur le (ou les) fluide(s). On néglige, de plus, l'action de la pesanteur.

- 1. Propagation d'une onde acoustique dans un tuyau de section constante contenant un fluide unique.**

Un tuyau cylindrique de section constante  $S$ , d'axe  $x'x$ , contient un fluide qui, au repos, est à la pression

FIG. 33: *le tuyau sonore.*

$P_0$ , à la température  $T_0$ ; sa masse volumique est  $\rho_0$ .

On considère une tranche de fluide qui, au repos, est située entre les abscisses  $x$  et  $x+dx$  (en pointillés fig. 33). Le passage de l'onde acoustique s'accompagne d'un déplacement d'ensemble des molécules contenues dans le plan d'abscisse  $x$ : soit  $\psi(x, t)$  ce déplacement à l'instant  $t$ ; ainsi la tranche de fluide considérée se trouve à l'instant  $t$  entre les plans  $x + \psi(x, t)$  et  $x + dx + \psi(x + dx, t)$  (en traits pleins fig. 33). On

notera de façon comparable :

- $u(x, t)$ , la vitesse de déplacement de la section d'abscisse  $x$  à l'instant  $t$  ;
- $p(x, t)$ , la surpression liée au passage de l'onde en  $x$  à  $t$  ; ainsi la pression s'écrira  $P(x, t) = P_0 + p(x, t)$  ;
- $\rho(x, t)$ , la masse volumique du fluide à l'abscisse  $x$  à l'instant  $t$  ;

On se limitera aux mouvements de faibles amplitudes ; ainsi le déplacement  $\psi(x, t)$ , la surpression  $p(x, t)$ , la variation de la masse volumique  $\rho(x, t) - \rho_0$  et leurs dérivées peuvent être considérés comme des infiniment petits du premier ordre. On négligera dans la suite tous les infiniment petits d'ordre supérieur ou égal à deux.

**a.** En raisonnant sur la tranche de fluide considérée, établir, en précisant la loi utilisée, que

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = - \frac{\partial p}{\partial x}.$$

**b.** L'évolution de la portion de fluide considérée est supposée isentropique.

**b.α.** Justifier brièvement cette hypothèse.

**b.β.** On rappelle que le coefficient de compressibilité isentropique d'un fluide est défini par

$$\chi_S = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_S$$

où  $V$  est le volume du fluide et  $P$  sa pression; pour le fluide contenu dans le tuyau cylindrique, on supposera que  $\chi_S$  est une constante.

Montrer que l'on peut écrire

$$p = -\frac{1}{\chi_S} \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

**c.α.** En utilisant les résultats des questions B.l.a. et B.l.b., établir l'équation à laquelle satisfait la grandeur  $\psi(x, t)$ .

**c.β.** Quelle est la solution générale de cette équation?

**c.γ.** Montrer que l'on peut interpréter chacun des deux termes intervenant dans la réponse B.l.c.β. comme des ondes planes progressives, se propageant à la célérité  $c$  (vitesse du son).

Donner l'expression de  $c$ .

**d.** Montrer que les grandeurs  $p(x, t)$  et  $u(x, t)$  satisfont à la même équation de propagation que  $\psi(x, t)$ .

**e.α.** Le fluide est de l'air considéré comme un gaz parfait :

- de  $\gamma = C_P/C_V = 1,40$  (rapport des capacités calorifiques molaires à pression et à volume constant) ;
- de masse molaire  $M = 29 \text{ g mol}^{-1}$  ;
- de température  $T_0 = 293 \text{ K}$ .

$R = 8,32 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$  (constante molaire des gaz parfaits).

Donner l'expression de  $c$  en fonction de  $\gamma$ ,  $R$ ,  $T_0$  et  $M$ .

**e.β.** *Application numérique* : calculer  $c$ .

**f.** On considère la propagation dans le fluide d'une onde plane progressive sinusoïdale de pulsation  $\omega$  qu'on représente en notation complexe par

$$\underline{\psi}_1(x, t) = A_1 \exp\{i(\omega t - kx)\}$$

où  $A_1$  est une constante et  $k$  un réel positif (module du vecteur d'onde).

On supposera dans cette question que le tuyau est infini et donc qu'il n'y a aucune onde réfléchie se superposant à  $\underline{\psi}_1$ .

**f.α.** Dans quel sens se propage cette onde?

Déterminer l'expression de  $k$  en fonction de  $\omega$  et  $c$ , et calculer sa valeur pour l'air avec une fréquence de l'onde de 1 kHz.

f.β. Exprimer alors  $\underline{p}_1(x, t)$  et  $\underline{u}_1(x, t)$ , représentations complexes de la surpression et de la vitesse.

f.γ. On appelle résistivité acoustique  $\mathcal{R}$ , la grandeur caractéristique du milieu définie par

$$\mathcal{R} = \rho_0 c.$$

Montrer que le rapport  $\underline{p}_1/\underline{u}_1$  s'exprime simplement en fonction de  $\mathcal{R}$ .

g. Soit l'onde  $\underline{\psi}'_1 = A'_1 \exp\{i(\omega t + kx)\}$ ,  $\underline{p}'_1$  et  $\underline{u}'_1$  étant les ondes de surpression et de vitesse associées. Exprimer le rapport  $\underline{p}'_1/\underline{u}'_1$  en fonction de la résistivité acoustique  $\mathcal{R}$  du milieu.

## 2. Réflexion et transmission dans un tuyau de section constante contenant deux fluides.

Le tuyau est maintenant séparé en deux régions (fig. 34).

La région (1) ( $x < 0$ ) contient un fluide (1) de résistivité acoustique  $\mathcal{R}_1 = \rho_1 c_1$ .

La région (2) ( $x > 0$ ) contient un fluide (2) de résistivité acoustique  $\mathcal{R}_2 = \rho_2 c_2$ .

La surface de contact entre les deux fluides est donc le plan perpendiculaire en  $O$  à l'axe  $x'$ .

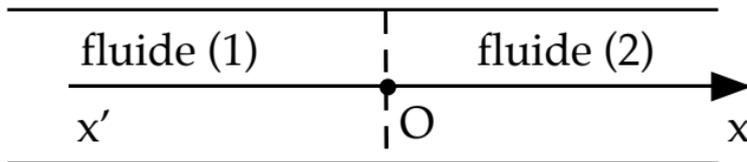


FIG. 34: le tuyau contenant deux fluides.

Une onde acoustique plane sinusoïdale se propage du milieu (1) vers le milieu (2) et est décrite en notation complexe par

$$\underline{p_1} = p_{0_1} \exp\{i(\omega t - k_1 x)\} \quad (\text{onde de surpression d'amplitude } p_{0_1}).$$

A l'interface entre les deux milieux, cette onde incidente donne naissance à une onde réfléchie dans le milieu (1) :  $\underline{p'_1}$  et à une onde transmise dans le milieu (2) :  $\underline{p_2}$ .

On admettra que les ondes réfléchie et transmise sont des ondes planes sinusoïdales d'amplitude respectives  $p'_{0_1}$  et  $p_{0_2}$ .

**On précise que dans le plan  $x = 0$  il y a continuité de la pression (donc de la surpression  $p$ ) et du débit volumique  $Su$  (c'est-à-dire ici continuité de la grandeur  $u$  car la section  $S$  du tuyau est constante.)**

**a.** Montrer que les ondes réfléchie et transmise sont de même pulsation  $\omega$  que l'onde incidente.

b. Exprimer  $\underline{p}'_1$  et  $\underline{p}_2$ .

c. En exploitant les conditions de continuité, exprimer en fonction de  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  les coefficients de réflexion  $r_{12}$  et de transmission  $t_{12}$  relatifs aux amplitudes des surpressions. Ces coefficients sont définis par

$$r_{12} = \frac{p'_{0_1}}{p_{0_1}}. \quad t_{12} = \frac{p_{0_2}}{p_{0_1}}.$$

d. Coefficients de réflexion et de transmission en puissance.

On peut calculer pour chacune des trois ondes une puissance acoustique transportée, définie par

$$\mathcal{P} = |pu|S \quad (\text{S est la section du tuyau}).$$

d. $\alpha$ . Déterminer les coefficients de réflexion  $R$  et de transmission  $T$ , relatifs aux puissances acoustiques.

d. $\beta$ . Quelle remarque (prévisible) peut-on faire au sujet de  $R$  et  $T$ ?

e. *Application numérique.*

Le milieu (1) est l'air, le milieu (2) est l'eau. On prendra respectivement

$$\mathcal{R}_1 = 4,50 \cdot 10^2 \text{ uSI}; \quad \mathcal{R}_2 = 1,40 \cdot 10^6 \text{ uSI}.$$

Déterminer numériquement  $R$  et  $T$ . Commenter.

**3. Réflexion et transmission dues à un changement de section dans un tuyau sonore.**

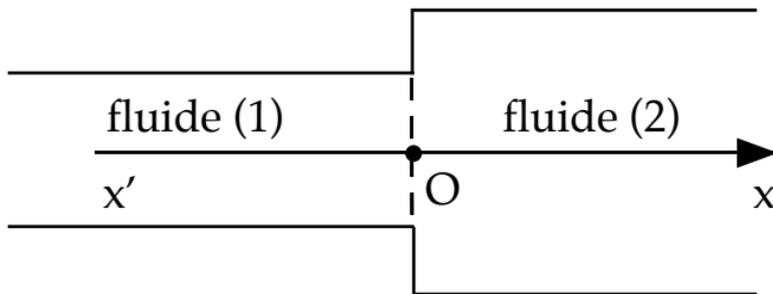


FIG. 35: *le tuyau avec changement de section.*

Soit un tuyau sonore composé de deux parties cylindriques de même axe  $x'x$ , de sections respectives  $S_1$  et  $S_2$ , raccordées par la surface perpendiculaire en  $O$  à l'axe  $x'x$ .

Les deux parties cylindriques sont remplies respectivement des fluides (1) et (2) [fig. 35].

Par définition, on appellera impédance caractéristique du milieu  $i$ , la grandeur  $Z_i = \mathcal{R}_i/S_i$ , rapport de la résistivité acoustique du milieu par la section correspondante.

On considère une onde plane acoustique incidente  $\underline{p}_1$  (représentation complexe) se propageant dans le

milieu (1) dans le sens des  $x$  positifs. Elle donne naissance à une onde réfléchie  $\underline{p}'_1$  et à une onde transmise  $\underline{p}_2$ , à l'interface entre les deux milieux.

a. En écrivant les conditions de continuité (cf. B.2.), déterminer, en fonction de  $Z_1$  et  $Z_2$ , les coefficients de réflexion  $r_{12}$  et de transmission  $t_{12}$ , relatifs aux amplitudes des surpressions.

b. Déterminer les coefficients de réflexion  $R$  et de transmission  $T$ , relatifs aux puissances acoustiques.

c. En supposant que les fluides (1) et (2) sont identiques, y a-t-il réflexion à l'interface entre les deux milieux?

Si oui, calculer  $r_{12}$  et  $t_{12}$  et préciser s'il y a changement de phase.

d. Dans le cas où les deux fluides sont de nature différente, retrouve-t-on les résultats du B.2. si  $S_1 = S_2$ ?

## 3EME PARTIE. THERMODYNAMIQUE



Cette partie est corrigée page 321.

On notera  $P$ ,  $T$ ,  $V$  les paramètres pression, température et volume d'un gaz ; on notera respectivement  $C_p$ ,  $C_v$  les capacités calorifiques molaires à pression et à volume constant, et  $\gamma$  le rapport  $\gamma = C_p/C_v$ .

Dans la suite, les systèmes thermodynamiques étudiés seront des gaz parfaits et on supposera que  $C_p$  et  $C_v$  sont des constantes indépendantes de la température.

### 1. Quelques propriétés d'un gaz parfait.

**a.** Rappeler l'équation d'état d'un gaz parfait ; on désignera par  $n$ , le nombre de moles, et par  $R$  la constante molaire des gaz parfaits.

**b.α.** Rappeler la relation qui lie la fonction d'état enthalpie  $H$  à la fonction d'état énergie interne  $U$ .

**b.β.** Montrer que (relation de Mayer)  $C_p - C_v = R$ .

**b.γ.** Exprimer  $C_v$  en fonction de  $R$  et  $\gamma$ .

**b.δ.**  $n$  moles d'un gaz parfait évoluent d'un état initial caractérisé par  $P_0$ ,  $V_0$  jusqu'à un état final caractérisé par  $P_1$ ,  $V_1$ .

Montrer que la variation d'énergie interne de ce gaz parfait au cours de cette transformation peut s'écrire

$$\Delta U = \frac{P_1 V_1 - P_0 V_0}{\gamma - 1}.$$

## 2. Transformations réversibles d'un gaz parfait.

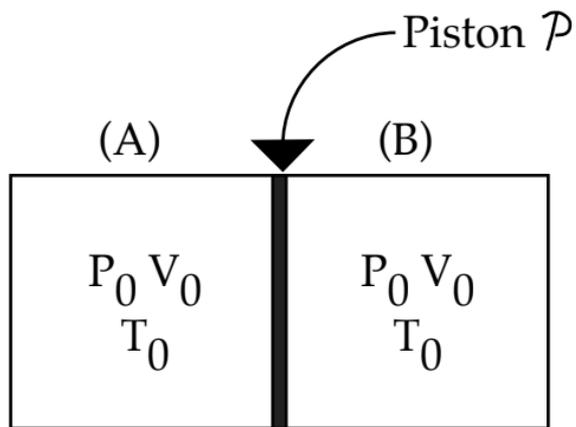
Un cylindre horizontal, de volume invariable, est fermé à ses deux extrémités par deux parois fixes. Ce cylindre est séparé en deux compartiments  $A$  et  $B$  par un piston  $\mathcal{P}$  mobile sans frottements. Les parois du cylindre et le piston sont adiabatiques et de capacités calorifiques négligeables.

Dans l'état initial, les deux compartiments  $A$  et  $B$  contiennent un même nombre de moles d'un gaz parfait dans le même état  $P_0, V_0, T_0$  (fig. 36).

On chauffe le compartiment  $A$  à l'aide d'une résistance électrique jusqu'à un état final où la pression dans le compartiment  $A$  est  $P_1 = 3P_0$  (fig. 37).

On pourra considérer la suite des états du système comme une suite d'états d'équilibre.

a. Calculer :

FIG. 36: *l'état initial.*

**a.α.** Pour l'état final du compartiment  $B$  :

- la pression  $P_2$ ,
- le volume  $V_2$ ,
- la température  $T_2$  ;

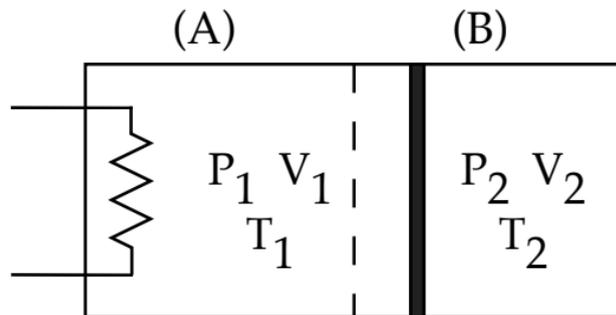


FIG. 37: l'état final.

**a.β.** Pour l'état final du compartiment A :

- le volume  $V_1$ ,
- la température  $T_1$  ;

**b.** On veut déterminer la quantité de chaleur  $Q_1$  fournie par la résistance chauffante au compartiment A.

**b.α.** Montrer que  $Q_1$  s'exprime très facilement en fonction des variations d'énergie interne des gaz des

compartiments  $A$  et  $B$  (respectivement  $\Delta U_1$  et  $\Delta U_2$ ).

**b.β.** Donner l'expression de  $Q_1$  en fonction de  $P_0$ ,  $V_0$  et  $\gamma$ .

**3. Détente irréversible d'un gaz parfait.**

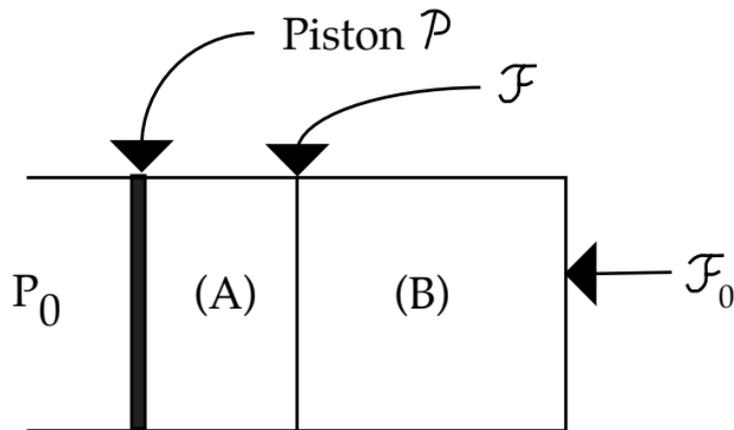


FIG. 38: *le cylindre.*

Un cylindre horizontal (fig. 38) est fermé à l'une de ses extrémités par une paroi fixe  $\mathcal{F}_0$  et, à l'autre extrémité, par un piston  $\mathcal{P}$  qui peut coulisser sans frottements le long du cylindre.

Le cylindre est séparé en deux compartiments  $A$  et  $B$  par une paroi fixe  $\mathcal{F}$ .

Sur la face extérieure du piston s'exerce la pression atmosphérique  $P_0$  qu'on suppose uniforme et constante.

Dans la situation initiale, le compartiment  $A$  de volume  $V_A$  contient  $n$  moles d'un gaz parfait. Le compartiment  $B$  de volume  $V_B$  est initialement vide (fig. 38).

Les parois du cylindre et le piston sont adiabatiques et de capacités calorifiques négligeables.

- a. Préciser la pression initiale et la température initiale  $T_0$  dans le compartiment  $A$ .
- b. On perce un orifice dans la paroi fixe  $\mathcal{F}$  et on cherche à décrire les caractéristiques du nouvel état d'équilibre qu'on supposera atteint.
  - b. $\alpha$ . En analysant qualitativement le problème, montrer que selon la valeur de  $V_B$  par rapport à une valeur-seuil  $V_{B_S}$  (qu'on ne cherchera pas à déterminer à ce stade de l'étude), deux types de solutions existent ; pour répondre à cette question, on pourra s'intéresser à l'équilibre mécanique du piston dans l'état final.
  - b. $\beta$ . En supposant que  $V_B$  est inférieur à la valeur-seuil, déterminer les caractéristiques  $P_1, V_1, T_1$  du gaz

enfermé dans le cylindre  $A + B$  quand le nouvel état d'équilibre est atteint; on exprimera ces grandeurs en fonction de toutes ou de certaines des données  $P_0$ ,  $\gamma$ ,  $n$ ,  $V_A$ ,  $V_B$  et de  $R$ .

**b.γ.** Déterminer la valeur-seuil  $V_{B_S}$  en fonction de  $V_A$  et de  $\gamma$ .

**b.δ.** On suppose cette fois  $V_B$  supérieur à  $V_{B_S}$ .

Déterminer  $P_2$ ,  $V_2$ ,  $T_2$  du gaz enfermé à l'intérieur du cylindre dans le nouvel état d'équilibre; on exprimera ces grandeurs en fonction de toutes ou de certaines des données  $P_0$ ,  $\gamma$ ,  $n$ ,  $V_A$ ,  $V_B$  et de  $R$ .

**c.α.** Déterminer l'entropie d'un gaz parfait (à une constante près) en fonction de  $n$ ,  $C_p$ ,  $\gamma$ ,  $P$ ,  $V$ .

**c.β.** En déduire l'expression de la variation d'entropie  $\Delta S_1$  du gaz en fonction de  $n$ ,  $\gamma$ ,  $V_A$ ,  $V_B$  et  $C_p$  dans le cas où l'état final est celui du 3.b.β.

Ce résultat est-il conforme au second principe de la thermodynamique?

**c.γ.** Déterminer de la même façon  $\Delta S_2$ : l'état final étant celui du 3.b.δ. Ce résultat est-il conforme au second principe de la thermodynamique?

# 1995 (incomplet)

Première partie. Phénomènes liés à l'atmosphère terrestre

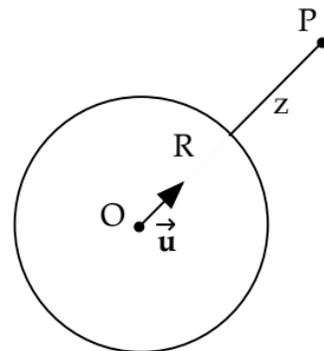
A) Stabilité de l'atmosphère terrestre



Cette partie est corrigée page 331.

On considérera que la Terre est assimilable à une planète de centre  $O$  possédant une répartition de masse à symétrie sphérique de rayon  $R = 6400$  km. Pour les applications numériques, on prendra :

- Constante de Boltzmann  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$  ;
- Permittivité du vide :  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$  ;



On considère un corps ponctuel de masse  $m$  situé en un point  $P$  d'altitude  $z$  et on note  $\vec{u}$  le vecteur unitaire situé sur  $OP$  et dirigé de  $O$  vers  $P$ ,  $K$  la constante de gravitation universelle et  $M_T$  la masse de la Terre.

1. Donner sans démonstration l'expression de la force de gravitation  $\vec{F}$  à laquelle est soumise la masse  $m$ , en fonction des données du problème.
2. En déduire l'expression du champ de gravitation  $\vec{G}$  créé par la planète au point  $P$ . Donner la relation liant  $G$ ,  $G_0$ ,  $R$  et  $z$ , où  $\vec{G}_0$  désigne le champ de gravitation au niveau de la surface de la Terre.  $G$  et  $G_0$  représentent les normes des vecteurs  $\vec{G}$  et  $\vec{G}_0$ .

3. Montrer que la force  $\vec{F}$  dérive d'une énergie potentielle  $E_p$ . Etablir l'expression de  $E_p$  en fonction de  $m$ ,  $G_0$ ,  $R$  et  $z$  dans le cas où on considère cette énergie nulle à l'infini.
4. On se place dans le cas où  $z = 0$  et où le corps possède une vitesse initiale  $\vec{V}_0$  dans le référentiel terrestre telle que le produit  $\vec{V}_0 \cdot \vec{u}$  soit positif. On supposera que durant son mouvement, le corps n'est soumis que à la force  $\vec{F}$ . Calculer l'énergie mécanique  $E_m$  du corps et en déduire, en fonction de  $G_0$  et  $R$ , l'expression de la vitesse de libération  $V_l$  à partir de laquelle le corps échappera à l'attraction universelle de la Terre. On donne  $G_0 = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ . Calculer numériquement  $V_l$ .
5. Préciser sans démonstration la nature géométrique de la trajectoire dans les trois cas suivants:  $V_0 < V_l$ ,  $V_0 = V_l$ ,  $V_0 > V_l$  avec  $\vec{V}_0 \cdot \vec{u} > 0$  et  $\vec{V}_0$  non colinéaire à  $\vec{u}$ .

Pour rendre compte d'un certain nombre de propriétés de l'atmosphère terrestre, on peut adopter une modélisation très simple qui consiste à supposer que :

- Les  $N_0$  molécules qui composent l'atmosphère terrestre ont la même masse que l'on désignera par  $m_a$ .
- L'atmosphère constitue un système en équilibre isotherme à la température  $T = 300 \text{ K}$ .

Dans ce cas, on peut montrer que le nombre  $dN$  de molécules ayant une vitesse de module compris entre  $V$  et  $V + dV$  s'écrit

$$dN = \frac{4N_0}{\sqrt{\pi}} \frac{V^2}{V_p^3} \exp\left(-\frac{V^2}{V_p^2}\right) dV$$

où  $V_p$ , vitesse la plus probable, s'écrit

$$V_p = \sqrt{\frac{2kT}{m_a}}.$$

**6.** La pression atmosphérique est  $p_0$  au niveau du sol. Considérons une petite portion de la surface du sol, d'aire égale à  $S$ . Cette surface peut être considérée comme plane, et la force  $\vec{f}$  exercée par l'atmosphère sur  $S$  peut être interprétée:

- Soit comme la force pressante exercée sur  $S$  par le fluide de pression  $p_0$ .
- Soit comme le poids des  $n_0$  molécules de l'atmosphère contenues dans le cylindre de section droite  $S$  et de génératrices verticales.

La plupart des molécules étant à une altitude  $z$  très petite devant le rayon terrestre, on considérera qu'elles sont toutes soumises au champ de gravitation uniforme  $\vec{G}_0$ .

**a.** Calculer la norme  $f$  de la force  $\vec{f}$  suivant les deux approches et en déduire  $n_0$ .

b. L'atmosphère étant équirépartie autour de la Terre, en déduire que le nombre total  $N_0$  de molécules constituant l'atmosphère terrestre peut s'écrire

$$N_0 = \frac{4\pi p_0 R^2}{m_a G_0}.$$

On donne les valeurs numériques suivantes:  $m_a = 5 \cdot 10^{-26}$  kg;  $p_0 = 1$  bar =  $10^5$  Pa. Calculer  $V_p$  et  $N_0$ .

7. On pose  $x = V/V_p$ . Quelle est l'expression donnant le nombre de molécules ayant une vitesse supérieure à  $x_0 V_p$  dans le cas où  $x_0 > 3$ ? On admettra la formule approchée

$$\int_{x_0}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{2} x_0 e^{-x_0^2} \quad \text{pour } x_0 > 3.$$

8. Si on s'en tient au modèle adopté, quel serait le nombre  $N$  de molécules de l'atmosphère terrestre possédant une vitesse supérieure à la vitesse de libération  $V_l$ ?

9. Sachant que l'atmosphère terrestre est constituée d'environ 20% de dioxygène et 80% de diazote en volume, justifier l'ordre de grandeur proposé pour la masse  $m_a$ , sachant que les masses atomiques molaires sont de  $16 \text{ g mol}^{-1}$  pour l'oxygène et  $14 \text{ g mol}^{-1}$  pour l'azote. La valeur de la constante d'Avogadro sera prise égale à  $6 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .

10. Reprendre le calcul dans le cas où l'on suppose que l'atmosphère est constituée du même nombre  $N_0$  de molécules de dihydrogène de masse  $m_a = 3,32 \cdot 10^{-27}$  kg.

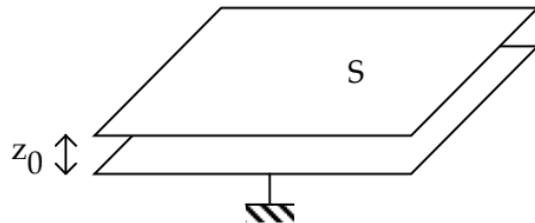
Malgré la simplicité du modèle proposé, les conclusions sont-elles cohérentes avec la réalité? Justifier votre réponse.

## B) Etude électrique du système (terre, atmosphère)



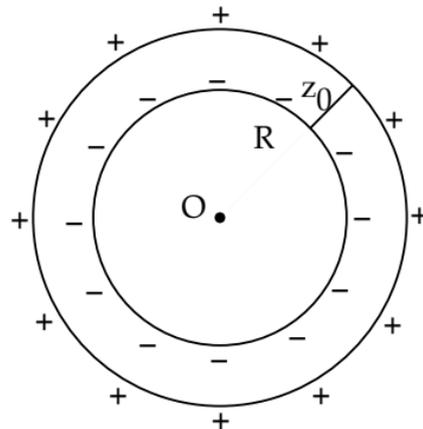
Cette partie est corrigée page 336.

On considère un condensateur plan dont les armatures, de surface  $S$ , sont parallèles, distantes de  $z_0$  et séparées par du vide de permittivité  $\epsilon_0$ . L'armature inférieure est reliée à la terre et l'armature supérieure est portée à un potentiel  $V$  positif. Les plaques sont alors uniformément chargées avec des densités  $-\sigma$  et  $+\sigma$ , et on notera  $-Q$  et  $+Q$  les charges totales portées par les deux armatures. On suppose les effets de bord négligeables.



1. Préciser à l'aide d'un schéma les principales caractéristiques du champ électrostatique  $\vec{E}$  régnant entre les armatures. Montrer en particulier que son module vaut  $E = \sigma/\epsilon_0$ .
2. Quelles sont les relations liant  $E$ ,  $V$  et  $z_0$  d'une part, et  $E$ ,  $Q$ ,  $S$  d'autre part?
3. En déduire les expressions de la capacité et de l'énergie électrostatique de ce condensateur en fonction de  $S$ ,  $z_0$ ,  $\epsilon_0$  et  $V$ . On donne:  $S = 10 \text{ cm}^2$ ;  $z_0 = 0,5 \text{ mm}$ ;  $V = 50 \text{ V}$ . Déterminer les valeurs numériques de la capacité  $C$  et de l'énergie  $W$ .

La terre et son atmosphère donnent lieu à des phénomènes électriques de très grande ampleur. Dans un premier temps, on considérera que l'ensemble (terre, atmosphère) se comporte comme un gigantesque condensateur sphérique et peut être modélisé à l'aide du schéma ci-contre. La terre se comporte alors comme un conducteur parfait de potentiel nul et porte une charge négative  $-Q$  uniformément répartie sur sa surface, tandis que la haute atmosphère peut être représentée par une surface équipotentielle sphérique de rayon  $R + z_0$ , de potentiel  $V$  et de charge totale  $+Q$ . On considérera que l'atmosphère a la permittivité du vide.



4. Etablir la relation donnant la valeur du champ électrostatique  $E(z)$  à une altitude  $z$  en fonction de  $Q$ ,  $R$ ,  $z$  et  $\epsilon_0$ .
5. En déduire l'expression de la capacité du système en fonction de  $R$ ,  $z_0$  et  $\epsilon_0$ .
6. Des mesures effectuées en haute altitude ont permis d'estimer les valeurs de  $z_0$  et  $V$  :  $z_0 = 50$  km et  $V = 400\,000$  V.  
Justifier que dans ces conditions, le système se comporte comme un condensateur plan et calculer numériquement l'énergie électrostatique du système ainsi que la valeur  $E$  du champ dans l'atmosphère.
7. Le traitement précédent suppose que la charge  $-Q$  est portée par la surface terrestre. En réalité,  $-Q$  est portée par le système (terre, basse altitude), et la surface terrestre porte la charge négative  $-Q'$  ( $Q' > 0$ ). Le champ  $\vec{E}_0$  au voisinage du sol, prend ainsi une valeur bien supérieure à celle observée en altitude. Calculer la valeur de cette charge  $-Q'$ , sachant que  $E_0 = 100$  V m<sup>-1</sup> et que la terre se comporte comme un conducteur parfait en équilibre électrostatique.

Par ailleurs, l'atmosphère est partiellement ionisée, et parcourue par de très faibles courants électriques verticaux dont l'effet principal est de décharger le système (terre, atmosphère). On admet que le vecteur densité de courant  $\vec{j}$  est radial et de norme constante en tout point de la surface terrestre. La mesure

expérimentale de la densité de courant de décharge au niveau du sol donne

$$j = 3,5 \cdot 10^{-12} \text{ A m}^{-2}.$$

Dans ces conditions, le système (terre, atmosphère) se déchargerait très vite, mais les orages et la foudre permettent de recharger constamment la terre en charges négatives et ainsi, de maintenir la stabilité du système.

8. Quels sont les principaux phénomènes naturels qui provoquent une ionisation des molécules de l'atmosphère?
9. Sachant qu'un impact de foudre sur la terre correspond à un transfert de charges d'environ  $-20 \text{ C}$ , calculer l'ordre de grandeur du nombre d'impacts de foudre par seconde à la surface de la terre.

## Deuxième partie. Fonctionnement d'un haut parleur

Les parties A, B sont partiellement indépendantes.

Un haut parleur a pour fonction de transformer un signal électrique en signal acoustique. Le but de ce

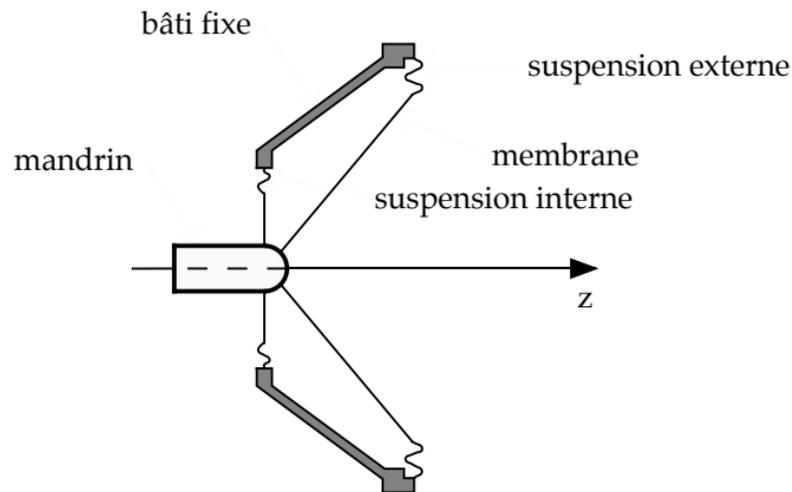


FIG. 39: coupe du haut parleur.

problème est de faire une étude simplifiée des différentes parties de cette transformation, en adoptant des modélisations.

On étudiera tout d'abord le fonctionnement de la partie mécanique, puis on s'intéressera à la relation électrique - mécanique, avant d'aborder l'étude de la puissance acoustique.

## A) Etude mécanique



Cette partie est corrigée page 341.

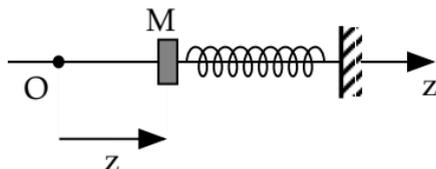
La partie mécanique d'un haut-parleur est constituée d'une membrane mobile en forme de cône, solidaire d'un mandrin cylindrique sur lequel sera enroulé le fil du bobinage. L'ensemble est maintenu en place par des suspensions élastiques, externe et interne, qui jouent à la fois un rôle :

- de guidage limitant le mouvement de l'équipage mobile à une translation le long de l'axe  $Oz$  ;
- de ressort maintenant le système dans une position d'équilibre stable.

Dans tout le problème, on n'envisagera que des déplacements horizontaux de cette membrane, et on ne tiendra pas compte du rôle joué par le poids de l'équipage mobile.

### I. Oscillations libres.

La partie mobile peut, en première approximation être représentée par une masse  $m$ , assimilable à un point matériel  $M$ , mobile sans frottement sur une tige horizontale  $Oz$ . Elle est rappelée dans sa position d'équilibre (le point  $O$ ) par un ressort de masse négligeable, de raideur  $k$  pouvant travailler en compression comme en extension. On repère la position du point  $M$  par son abscisse  $z$  sur l'axe  $Oz$ .

FIG. 40: *un modèle de la partie mobile.*

1. On écarte  $M$  de sa position d'équilibre et on le lâche à l'instant  $t = 0$ , sans vitesse initiale, à l'abscisse  $z_0$ .
  - a. Ecrire l'équation différentielle du mouvement de  $M$ .
  - b. En déduire l'expression de la pulsation  $\omega_0$  et de la période  $T_0$  du mouvement.
  - c. On donne  $m = 8 \text{ g}$  et  $k = 1536 \text{ N m}^{-1}$ . Déterminer les valeurs de  $T_0$  et de la fréquence  $N_0$  des oscillations.
2. Le modèle précédent constitue une approximation assez grossière de la réalité: la forme du solide (la membrane) est conçue pour interagir avec l'atmosphère ambiante afin d'en mettre les molécules en

mouvement pour émettre un son. Pour affiner le modèle précédent, on considérera que  $M$  est le centre d'inertie de l'équipage mobile, et que l'action de l'air ambiant sur la membrane se résume à une force que l'on écrira

$$\vec{F} = -f\vec{v} \quad \text{avec } f > 0$$

$\vec{v}$  étant la vitesse de  $M$  ;  $f$  sera considéré comme constant.

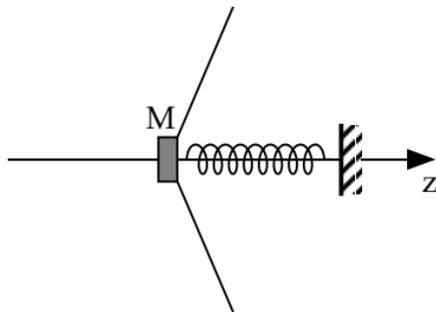


FIG. 41: un modèle moins grossier.

- a. Ecrire la nouvelle équation différentielle du mouvement.
- b. Déterminer, en fonction de  $k$  et  $m$ , la valeur  $f_c$  à donner à  $f$  pour que le système fonctionne en régime critique. Donner la valeur numérique de  $f_c$ .

- c. Ecrire l'équation différentielle du mouvement en fonction de  $\omega_0$  et de  $\alpha = f/f_c$ .
- d. La masse  $M$  étant abandonnée sans vitesse initiale en  $z_0$  à l'instant  $t = 0$ , donner, sans résoudre l'équation différentielle, l'allure des graphes  $z = f(t)$  lorsque  $\alpha$  est supérieur, inférieur ou égal à 1.
3. On se place maintenant dans le cas où  $\alpha$  est inférieur à 1.
- a.  $M$  étant abandonné en  $z_0$  sans vitesse initiale, déterminer l'expression de la pseudo-période  $T$  en fonction de  $T_0$  et de  $\alpha$ .
- b. Calculer la valeur numérique de  $T$ , puis de  $(T - T_0)/T_0$  pour  $\alpha = 0,1$ . Quelle conclusion en tirez-vous ?
- c. Lorsque  $\alpha$  est nettement inférieur à 1, on peut considérer que pendant une période, l'oscillation est quasi sinusoïdale et de période  $T_0$  : on peut alors la décrire par l'équation

$$z = a \cos(\omega_0 t + \phi).$$

- $\alpha$ . Exprimer l'énergie  $E$  de cet oscillateur en fonction de  $k$  et  $a$ , puis en fonction de  $m$ ,  $\omega_0$  et  $a$ .
- $\beta$ . Calculer la valeur du travail  $W$  de la force de frottement mis en jeu au cours de la période en fonction de  $m$ ,  $\alpha$ ,  $\omega_0$  et  $a$ .

$\gamma$ . En déduire l'expression du rapport  $Q = -2\pi E/W$  en fonction de  $\alpha$ , puis en fonction de  $m$ ,  $f$  et  $\omega_0$ .

$\delta$ . Quel nom donne-t-on habituellement à  $Q$ ?

## II. Oscillations forcées.

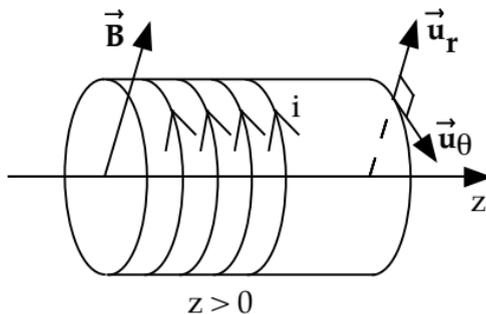


FIG. 42: la bobine.

Sur le mandrin cylindrique de l'équipage mobile, on enroule sous forme de spires jointives une longueur  $l$  de fil conducteur, et l'ensemble du cylindre est plongé dans un champ magnétique radial de norme constante  $B$ :  $\vec{B} = B\vec{u}_r$ .

1. Déterminer l'expression de la force magnétique exercée sur l'enroulement lorsque ce dernier est parcouru par le courant  $i$ . On considérera que le courant positif circule dans le sens opposé au vecteur orthoradial  $\vec{u}_\theta$ , et on notera sur un croquis clair le sens de la force exercée sur un courant positif.
2. On impose, dans l'enroulement, un courant sinusoïdal de la forme

$$i = I_0 \cos \omega t.$$

Ecrire la nouvelle équation différentielle du mouvement de  $M$ , en fonction de  $\omega_0$ ,  $\alpha$ ,  $i$ ,  $B$ ,  $l$  et  $m$ .

Quelle est la signification physique de la solution de l'équation sans second membre? Qu'appelle-t-on régime forcé?

3. On cherche, en régime forcé, une solution de la forme  $z = a \cos(\omega t + \phi)$ . Pour cela, on pose

$$\bar{i} = I_0 e^{j\omega t}, \quad \bar{z} = a e^{j(\omega t + \phi)}.$$

a. Déterminer  $a$  et  $\phi$  en fonction de  $I_0$ ,  $\omega$ ,  $\omega_0$ ,  $\alpha$ ,  $m$ ,  $B$  et  $l$ .

b. Tracer l'allure de la courbe  $a/I_0 = f(\omega)$  dans les deux cas suivants:  $\alpha \ll 1$  et  $\alpha \gg 1$ . On fera apparaître si possible la grandeur  $Q$  sur le graphique.

## B) Etude énergétique



Cette partie est corrigée page 349.

### I. Bilan électromécanique.

La bobine du haut parleur, qui a une résistance  $r$  et une inductance propre  $L$ , est alimentée par une tension  $u$  quelconque.

1. L'équipage mobile étant animé d'une vitesse  $\vec{v} = v\vec{u}_z$ , calculer la valeur du champ électromoteur en tout point de l'enroulement. En déduire la f.é.m d'induction aux bornes de la bobine.
2. Ecrire l'équation des mailles relative au circuit de l'enroulement.
3. En combinant cette équation à l'équation mécanique établie en A.II.2., déterminer l'expression du produit  $ui$ . Montrer qu'il se met sous la forme d'une somme de cinq termes dont on donnera les significations.

## II. Puissance acoustique.

Pour faire un bilan de puissance du fonctionnement du haut-parleur, le constructeur effectue des mesures électriques et acoustiques.

La puissance acoustique est mesurée à l'aide d'un sonomètre dans les conditions suivantes:

- Le haut-parleur est monté sur un baffle (mot anglais signifiant «écran»): on peut alors considérer qu'il rayonne de façon isotrope dans le demi espace face au haut-parleur.
- Le sonomètre est placé à 1 mètre du haut-parleur: on peut alors considérer que la source est quasi ponctuelle.
- Le haut-parleur est alimenté par une tension sinusoïdale de fréquence variable, et de valeur efficace  $u$  constante.

L'intensité sonore  $I_{dB}$  est mesurée en décibels

$$I_{dB} = 10 \log \frac{I}{I_0},$$

$I$  représentant l'intensité acoustique mesurée et  $I_0$  l'intensité de référence

$$I_0 = 10^{-12} \text{ W m}^{-2}.$$

Les résultats expérimentaux obtenus sont les suivants :

Fréquence en Hz	Puissance électrique en W	Intensité en dB
60	0,196	89
200	0,847	99

1. Calculer la valeur de l'intensité acoustique en  $\text{W m}^{-2}$  pour les deux fréquences données.
2. En déduire, pour ces deux fréquences, la puissance acoustique  $P_a$  émise par le haut-parleur, et son rendement acoustique.
3. Que devient la puissance électrique non transformée en puissance acoustique ?

### C) Alimentation du haut-parleur

Pour réaliser l'étude expérimentale précédente, on alimente le haut-parleur par une tension sinusoïdale de fréquence variable. On se propose d'étudier le fonctionnement d'une telle alimentation.

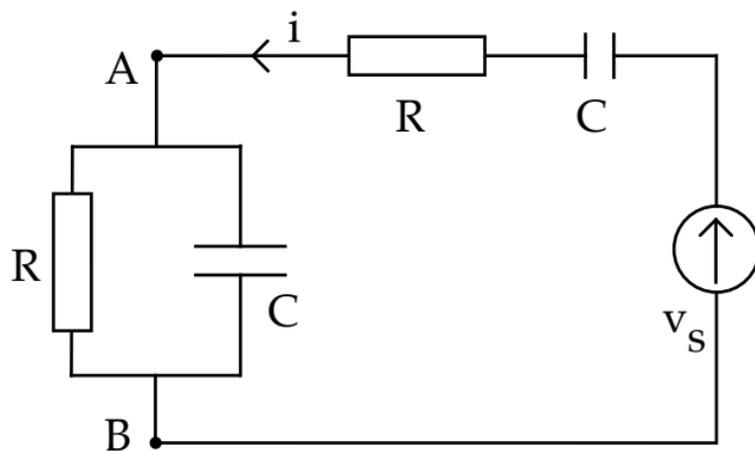


FIG. 43: l'alimentation.

On considère le circuit représenté dans la figure 43;  $v_s$  est une tension de forme quelconque, fournie par une source supposée parfaite. On désigne par  $i$  le courant qui circule dans l'association  $R$ - $C$  série, et par  $v_e$  la tension  $V_A - V_B$ .

**1.a.** Etablir la relation qui existe entre  $i$ ,  $v_e$  et  $dv_e/dt$ .

**1.b.** En utilisant la relation établie précédemment, établir l'équation différentielle du second ordre en  $v_e(t)$ .

**2.** Le générateur de tension  $v_s$  est en fait une source commandée par  $v_e$ , de telle façon que l'on ait

$$v_s = Gv_e \quad (31)$$

où  $G$  est une constante.

**2.a.** Ecrire l'équation différentielle vérifiée par  $v_e$ . Pour quelle valeur de  $G$  cette équation admet-elle une solution sinusoïdale?

**2.b.** Donner l'expression de la pulsation, puis de la fréquence de cette solution.

**2.c.** Calculer la valeur de la fréquence de l'oscillation pour :  $C = 100 \text{ nF}$  ;  $R = 4,7 \text{ k}\Omega$ . On admet que, lorsque les conditions précédentes sont réalisées, il y a oscillation spontanée du circuit à la suite des transitoires consécutifs à la mise sous tension.

**3.** Les conditions précédentes sont assurées par un amplificateur de tension dont l'entrée d'impédance infinie est branchée en  $AB$  ; la sortie, d'impédance nulle, constitue la source de tension  $v_s$ . L'amplificateur est réalisé suivant la figure 44 par un amplificateur opérationnel supposé parfait, qui fonctionne de façon linéaire dans le domaine :  $-14 \text{ V} < v_s < 14 \text{ V}$ . On donne  $R_1 = 55 \text{ k}\Omega$ .

**3.a.** Quelle doit être la valeur de  $R_2$  ?

**3.b.** Que se passe-t-il si accidentellement,  $G$  devient légèrement inférieur, puis supérieur à la valeur trouvée plus haut ?

**4.** Pour stabiliser l'oscillateur, on remplace la résistance  $R_2$  par une varistance VDR, dont la résistance diminue lorsque la différence de potentiel  $v_2$  à ses bornes augmente. Les couples de valeurs numériques caractérisant la VDR sont regroupés dans le tableau ci-dessous :

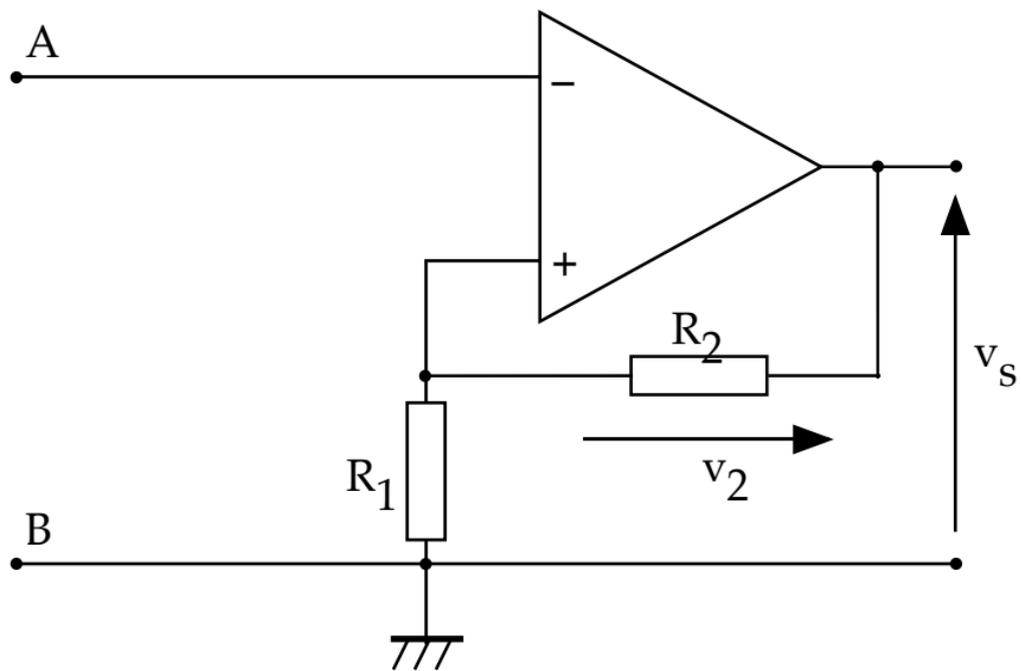
$R_2$ en $k\Omega$	238	185	150	126	106	90	74	51	37
$v_2$ en V	4	5	6	7	8	9	10	12	14

**4.a.** Déterminer l'expression de  $v_s$  en fonction de  $G$  et de  $v_2$ .

**4.b.** En déduire les valeurs numériques de  $G$  et de  $v_s$  pour les différentes valeurs numériques de  $v_2$  données.

**4.c.** Tracer la courbe  $G(v_s)$ . En déduire la valeur de l'amplitude de l'oscillation fournie par le montage ; montrer que le système est bien stabilisé par la présence de la VDR.

Un tel montage constitue seulement le point de départ d'une alimentation pour haut-parleur : il faut bien entendu insérer un amplificateur de puissance entre le circuit oscillant et le haut-parleur.

FIG. 44: *l'amplificateur.*

# 1996

## PREMIERE PARTIE. Schéma de principe d'un oscillateur à fréquence modulée

### I) Etude d'un oscillateur

1. On considère le quadripôle représenté sur la figure 45.

Dans ce montage,  $C_1$  et  $C_2$  sont les capacités des deux condensateurs;  $v(t)$  et  $v_2(t)$  sont les valeurs

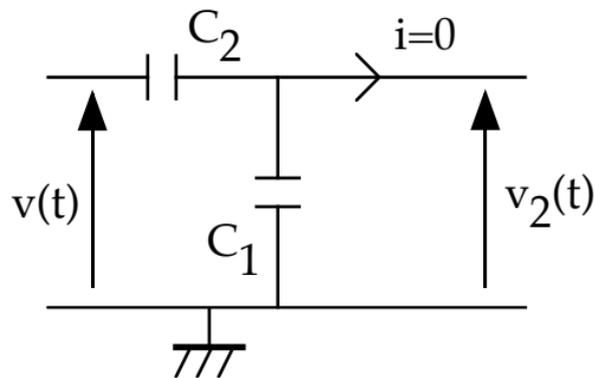


FIG. 45: *le premier quadripôle.*

instantanées des tensions d'entrée et de sortie du quadripôle.

On suppose que le régime de fonctionnement du quadripôle est sinusoïdal de pulsation  $\omega$ .

Pour la suite du problème, on utilisera la notation complexe dont on rappelle que :

- l'amplitude complexe de la grandeur instantanée sinusoïdale  $v(t)$  est notée  $\underline{V}$ ,
- le nombre complexe dont le carré est égal à  $-1$  est noté  $j$  ce qui implique  $j^2 = -1$ .

1.1. Donner le nom de ce montage classique et préciser son utilité.

Exprimer le rapport  $\underline{V}_2/\underline{V}$  en fonction de  $C_1$  et  $C_2$ .

Quelle relation existe-t-il entre les phases de  $v_2(t)$  et de  $v(t)$ ?

1.2. On considère maintenant le quadripôle représenté sur la figure 46.

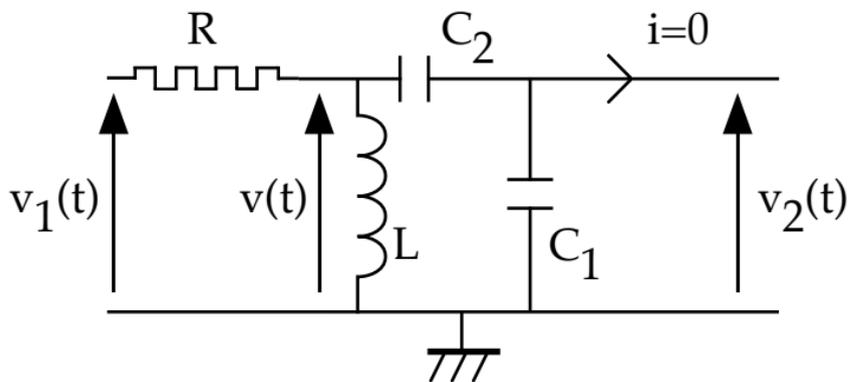


FIG. 46: *le deuxième quadripôle.*

On reconnaît, en partie dans cette représentation, le quadripôle de la figure 45. Dans ce montage,  $R$  est la valeur de la résistance,  $L$  celle de l'inductance de la bobine;  $v_1(t)$  est la tension d'entrée du nouveau

quadripôle.

On convient de noter  $\underline{Z}$  l'impédance complexe de l'ensemble formé par la bobine d'inductance ( $L$ ) et les deux condensateurs ( $C_1$  et  $C_2$ ).

Etablir l'expression de  $\underline{Z}$  en fonction de  $L$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  et  $\omega$ .

**1.3.** Exprimer le rapport  $\underline{V}/\underline{V}_1$  en fonction de  $R$  et  $\underline{Z}$ , puis en fonction de  $R$ ,  $L$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  et  $\omega$ .

**1.4.** En déduire l'expression de la fonction de transfert  $\underline{T}(j\omega) = \underline{V}_2/\underline{V}_1$  que l'on mettra sous la forme

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{1}{a + \frac{1}{bj\omega} + dj\omega}. \quad (32)$$

Expliciter les coefficients  $a$ ,  $b$  et  $d$  de la fonction de transfert  $\underline{T}$  en fonction de  $R$ ,  $L$ ,  $C_1$  et  $C_2$ .

Quelles sont les dimensions des coefficients  $a$ ,  $b$  et  $d$ ?

- 2.** On envisage maintenant l'utilisation d'un amplificateur opérationnel, supposé idéal, en régime de fonctionnement linéaire. Dans ces conditions, on a :  $v_+ = v_-$  et  $i_+ = i_- = 0$  (figure 47).

L'amplificateur opérationnel est inséré dans le montage représenté sur la figure 48.  $R_1$  et  $R_2$  sont deux résistances. On remarquera la présence du quadripôle de la figure 46 dans ce montage.

**2.1.** On envisage, pour ce montage, un régime de fonctionnement sinusoïdal permanent.

Exprimer l'amplitude complexe,  $\underline{V}_-$ , de deux manières différentes,

- tout d'abord en fonction de  $\underline{V}_e$ ,  $\underline{V}_s$ ,  $R_1$  et  $R_2$ ,
- puis en fonction de  $\underline{T}$  et  $\underline{V}_s$ .

En déduire une relation entre  $\underline{V}_e$  et  $\underline{V}_s$  faisant intervenir  $\underline{T}$ ,  $R_1$  et  $R_2$ .

**2.2.** On relie maintenant  $R_1$  directement à la masse, ce qui revient à annuler la tension d'entrée ( $v_e = 0$ ).

Montrer que, sous certaines conditions, on peut malgré tout avoir  $v_s(t)$  différent de zéro.

Dans cette situation,  $v_s(t)$  peut être une fonction sinusoïdale du temps. Exprimer la condition d'oscillation par une relation simple entre  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $C_1$  et  $C_2$ .

On pose  $C' = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$ . Exprimer la pulsation des oscillations en fonction de  $L$  et  $C'$ .

## II) Etude d'un oscillateur a fréquence modulée

1. Pour réaliser un oscillateur à fréquence modulée, on branche une diode à capacité variable (ou «varicap») en parallèle avec la bobine d'inductance  $L$ . Une varicap peut être assimilée à un condensateur dont la

capacité  $C(s)$  est fonction d'une grandeur  $s$ , susceptible de varier avec le temps.

La capacité  $C(s)$  varie avec  $s$  selon la loi

$$C(s) = As^n \quad (33)$$

où  $A$  et  $n$  sont des constantes positives.

Le quadripôle représenté sur la figure 46 est alors modifié. Son nouveau schéma est reporté sur la figure 49.

La fonction de transfert  $\underline{T}'(j\omega)$  de ce nouveau quadripôle peut s'écrire

$$\underline{T}'(j\omega) = \frac{1}{a' + \frac{1}{b'j\omega} + d'j\omega}. \quad (34)$$

Expliciter les coefficients  $a'$ ,  $b'$  et  $d'$  en fonction de  $C(s)$ ,  $R$ ,  $L$ ,  $C_1$  et  $C_2$ , en remarquant qu'il suffit de remplacer l'impédance complexe de la bobine par celle de l'ensemble bobine et «varicap» en parallèle.

2. On reprend le montage de la figure 48, dans lequel  $v_e = 0$ , en y introduisant la «varicap». On obtient le montage de la figure 50.

On fixe  $s$  à la valeur constante  $S_0$ , pour laquelle  $C(S_0) = C_0$ .

Exprimer la pulsation  $\omega_0$  de l'oscillateur, en fonction de  $C_0$ ,  $L$ ,  $C_1$  et  $C_2$ .

3. On impose maintenant  $s(t) = S_0 + \epsilon \cos(\alpha t)$ , où  $\epsilon$  et  $\alpha$  sont des constantes positives.

3.1. Sachant que  $\epsilon \ll S_0$ , établir l'expression approchée au premier ordre de  $C(t)$ .

3.2. En déduire l'expression de la pulsation instantanée  $\omega(t)$  de l'oscillateur.

On convient de poser

$$\omega(t) = \omega_0 \left( 1 - \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \cos \Omega t \right). \quad (35)$$

Etablir les expressions de  $\Omega$  et du taux de modulation  $\beta = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ .

On parle, en langage courant, de «*porteuse*» et de «*signal modulant*».

Quelles sont les pulsations de ces deux signaux?

Quels sont leurs rôles respectifs?

3.3.

a) Donner les ordres de grandeur des fréquences des porteuses pour les ondes radio, de télévision et de télécommunication par satellite.

b) Une grandeur introduite dans l'étude précédente intervient dans le réglage d'un récepteur lorsque l'on choisit de capter une émission parmi d'autres. Préciser cette grandeur et donner son ordre de grandeur

usuel dans les communications radio.

c) Le dispositif étudié précédemment convient-il pour ce type de télécommunications; pourquoi?

d) Citer une autre méthode de modulation. La comparer succinctement à la modulation de fréquence et discuter ses avantages et inconvénients.

## DEUXIEME PARTIE. Etude de convertisseurs d'énergie

### I) Etude thermodynamique théorique d'un moteur à combustion interne



Cette partie est corrigée page **353**.

#### Préliminaires

1. On considère un système fermé. Qu'est-ce qu'un système fermé?

Enoncer le premier principe de la thermodynamique pour un système fermé subissant une transformation «finie», c'est à dire non élémentaire, l'amenant d'un état 1 à un état 2.

Que traduit le premier principe de la thermodynamique?

2. On considère un système fermé constitué par  $n$  moles d'un gaz considéré comme parfait, pour lequel la capacité thermique molaire à volume constant  $C_{V_m}$  est constante.

Rappeler l'expression de l'équation d'état du système.

Donner l'expression de la différentielle de l'énergie interne du système en fonction de la température.

3. Le système précédent subit une transformation isentropique.

Qu'est ce qu'une transformation isentropique?

La quantité  $\gamma = C_{P_m}/C_{V_m}$  étant supposée constante, montrer que la grandeur  $TV^{\gamma-1}$  reste invariante au cours de cette transformation. On rappelle que pour un gaz parfait,  $C_{V_m} = R/(\gamma - 1)$ .

### Etude du moteur

On considère un moteur à combustion interne à allumage par bougies. On se limite à l'étude de l'un des cylindres du moteur. Le cycle thermodynamique décrit par le fluide est le cycle de Beau de Rochas. On en donne, sur la figure 51, la représentation dans un diagramme où l'on porte en ordonnée la pression  $P$  du fluide et en abscisse le volume  $V$  du gaz contenu dans la chambre du cylindre. Les différentes étapes du cycle sont les suivantes :

- $M \rightarrow A$  : admission du mélange gazeux air - essence à la pression constante  $P_0$ . En  $A$ , il y a fermeture de la soupape d'admission et le volume  $V$  est alors égal à  $V_{\max}$ .

- $A \rightarrow B$  : compression, supposée isentropique, du mélange. Dans l'état  $B$ , le volume est égal à  $V_{\min}$ .
- $B \rightarrow C$  : échauffement isochore du gaz.
- $C \rightarrow D$  : détente isentropique du gaz. Dans l'état  $D$ , le volume est  $V_{\max}$ .
- $D \rightarrow A$  : refroidissement isochore du gaz.
- $A \rightarrow M$  : refoulement des gaz vers l'extérieur, à la pression  $P_0$ .

On convient de nommer *taux de compression*, le rapport  $\tau = V_{\max}/V_{\min}$ .

Le système envisagé est le gaz qui décrit le cycle  $ABCD$ . La quantité de gaz  $n$  (en mol) considérée est celle qui a été admise dans l'état  $A$ . Le transfert thermique de l'étape  $B \rightarrow C$  est dû à la combustion «interne» du mélange gazeux admis. Les réactifs et les produits de la réaction de combustion sont gazeux. Dans une approche simplifiée, on admettra que la quantité de gaz n'est pas modifiée par la combustion interne. Le gaz est assimilé à un gaz parfait, pour lequel les capacités thermiques molaires  $C_{Pm}$  et  $C_{Vm}$  sont constantes.

4. Soit  $Q_1$  le transfert thermique (ou chaleur échangée) mis en jeu dans l'étape  $B \rightarrow C$ .

Exprimer  $Q_1$  en fonction de  $n$ ,  $C_{Vm}$ ,  $T_B$  et  $T_C$ . Préciser le signe de cette grandeur. Dans quel sens s'effectue le transfert thermique?

5. Soit, de la même manière,  $Q_2$ , le transfert thermique mis en jeu dans l'étape  $D \rightarrow A$ .

Exprimer  $Q_2$  en fonction de  $n$ ,  $C_{Vm}$ ,  $T_A$  et  $T_D$ .

6. On note  $W$  le travail total échangé au cours du cycle  $ABCD$ .

Exprimer  $W$  en fonction de  $Q_1$  et  $Q_2$ .

7. Définir le rendement thermodynamique  $\eta$  du moteur. Exprimer  $\eta$  en fonction de  $Q_1$  et  $Q_2$ .

8. Exprimer  $\eta$  en fonction de  $T_A$ ,  $T_B$ ,  $T_C$  et  $T_D$ , puis en fonction de  $\tau$  et  $\gamma$ .

Calculer  $\eta$  pour les valeurs suivantes :  $\tau = 10$  et  $\gamma = 1,33$ .

On envisage maintenant un moteur dont la cylindrée est égale à 2,0 litres :

- on raisonnera sur un seul cylindre, possédant la cylindrée  $C_y$  du moteur définie selon :  $C_y = V_{\max} - V_{\min}$ .
- le taux de compression  $\tau$  est égal à 10.
- le mélange air-essence est admis à une température  $T_A = 320$  K et sous la pression  $P_A = 100$  kPa.
- la valeur de  $\gamma$  est égale à 1,33.
- le mélange gazeux admis contient 1 mole de carburant pour 60 moles de mélange.

**9.** Calculer les valeurs de  $V_{\max}$  et  $V_{\min}$ .

**10.** Calculer la quantité de gaz  $n'$  (en mol) de carburant consommé par cycle. On prendra  $R = 8,314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ .

**11.** En admettant que le pouvoir calorifique du carburant utilisé est égal à 4200 kJ par mole de carburant, calculer les valeurs de la température et de la pression dans l'état  $C$  du cycle.

**12.** Calculer la valeur du transfert thermique vers l'extérieur au cours d'un cycle du moteur.

Calculer la valeur de la puissance du moteur lorsque la vitesse de rotation du vilebrequin est égale à 4000 tours par minute.

**13.** Dans la pratique, le rendement est beaucoup plus faible. Donner au moins deux raisons rendant compte de cette différence.

**14.** Pourrait-on envisager un moteur ditherme transformant l'intégralité de la chaleur qu'il reçoit de la part de la source chaude, en travail mécanique? Justifier succinctement la réponse.

## II) Etude d'un dispositif d'ascenseur

On étudie dans cette partie un moteur électrique à courant continu  $M$  servant à la manœuvre d'un ascenseur. Ce moteur est constitué d'un rotor (ou induit) de résistance  $R$  et d'un dispositif inducteur susceptible de créer un flux inducteur  $\Phi$  réglable.

On admettra que le moteur possède les caractéristiques suivantes :

- la force contre-électromotrice  $e'$  du moteur est proportionnelle à la vitesse angulaire de rotation  $\omega$  du moteur et au flux inducteur  $\Phi$  :  $e' = k\omega\Phi$ .
- la résistance interne du moteur est  $R$ .
- le couple électromagnétique  $\Gamma$  du moteur est proportionnel à  $\Phi$  et à l'intensité  $I$  du courant qui traverse la machine, avec le même coefficient de proportionnalité :  $\Gamma = kI\Phi$ .

On fixe sur l'arbre du moteur  $M$  une poulie  $P$  de diamètre  $D$  qui entraîne un câble sans fin. Il n'y a pas de glissement du câble par rapport à la poulie. Sur les deux brins du câble sont intercalés une cage d'ascenseur  $A$  et un contrepoids  $B$  (figure 52). Le contrepoids et la cage d'ascenseur vide ont une même masse égale à  $m$ . On ne tient pas compte de la masse du câble dont la tension est assurée par la présence d'une poulie  $P'$  de diamètre  $D$ .

La cage d'ascenseur contient une charge de masse  $m'$ .

On étudie un mouvement *uniforme* de montée de la cage  $A$  à la vitesse  $v$ . On ne tient pas compte des frottements mécaniques sur l'arbre.

**1.** Décomposer le système mécanique en «sous-systèmes» judicieusement choisis. On les décrira avec soin. Donner l'expression du couple  $\Gamma$  du moteur en fonction de  $m'$ , de  $D$  et de l'accélération de la pesanteur  $g$ .

**2.** On alimente le moteur sous la tension  $U$ . La figure 53 représente le modèle électrique équivalent du moteur.

Exprimer l'intensité  $I$  en fonction de  $U$ ,  $R$ ,  $e'$  et en déduire une équation du second degré en  $I$ .

**3.** Retrouver l'équation du second degré en  $I$  par des considérations énergétiques globales sur le dispositif.

**4.** En déduire l'expression de l'intensité  $I$ . Commenter le résultat obtenu.

## TROISIEME PARTIE. Etude d'une lunette astronomique

La lunette astronomique est un système centré qui se compose :

- d'un objectif de distance focale  $f'_1$ , assimilé à une lentille mince de centre optique  $O_1$ , de diamètre  $D$ .
- d'un oculaire, système convergent que nous assimilerons également à une lentille mince de centre optique  $O_2$ , de distance focale  $f'_2$  et de diamètre  $d$ .

On prendra  $f'_1 = 1,0 \text{ m}$  ;  $D = 10 \text{ cm}$  ;  $f'_2 = 50 \text{ mm}$  ;  $d = 16 \text{ mm}$ .

L'objectif donne d'un objet éloigné une image réelle, l'image objective, qui est observée au moyen de l'oculaire.

### I) Grossissement et cercle oculaire

1. L'objet observé est situé à l'infini. Son diamètre apparent est égal à  $\theta$ , angle sous lequel il est vu en l'absence de lunette. Pour que l'œil de l'observateur n'accomode pas, l'image donnée par la lunette doit être située à l'infini.

Indiquer la position et la taille de l'image objective ainsi que les positions relatives du foyer image  $F'_1$  de l'objectif et du foyer objet  $F'_2$  de l'oculaire.

Comment désigne-t-on un tel système optique?

Calculer le diamètre apparent de l'image finale donnée par la lunette.

**2.** Définir le grossissement de la lunette et calculer sa valeur.

**3.** On considère un point objet à l'infini sur l'axe optique de la lunette.

Calculer les valeurs des angles respectifs sous lesquels sont vus la monture de l'objectif et celle de l'oculaire depuis l'image objective du point considéré précédemment.

En déduire que le «diaphragme d'ouverture», ouverture qui limite le faisceau de rayons utilisés pour la formation de l'image, est constitué par la monture de l'objectif.

On considère maintenant deux objets ponctuels situés à l'infini, l'un sur l'axe optique, l'autre en dehors de l'axe optique.

**4.** Dessiner soigneusement les rayons limites des faisceaux sortant de la lunette et issus de chacun des points précédents.

5. En déduire :

- que le diaphragme de champ de la lunette est constitué par la monture de l'oculaire.
- que tous les rayons lumineux sortant de la lunette traversent un disque, le cercle oculaire, dont le centre qui se trouve sur l'axe optique est noté  $C'$ .

Donner la relation qui existe entre le cercle oculaire et le diaphragme d'ouverture.

6. Déterminer la position de  $C'$  par rapport à  $O_2$  et calculer le diamètre du cercle oculaire.

Où doit-on placer la pupille de l'œil quand on utilise la lunette ; pourquoi ?

## II) Etude du pouvoir séparateur d'une lunette astronomique

### 1. Diffraction de la lumière par une fente fine

On pratique dans un écran opaque une ouverture ayant la forme d'une fente de largeur  $2a$  et de hauteur  $b$ . On choisit  $b \gg a$ . L'espace est rapporté à un trièdre  $Oxyz$ . L'écran se trouve dans le plan  $xOy$ . Les côtés de la fente sont parallèles respectivement aux axes  $x'Ox$  et  $y'Oy$ . Les intersections de la fente avec l'axe  $x'Ox$  sont notées  $B$  et  $A$ . Les coordonnées de  $A$  sont  $(a, 0, 0)$  et celles de  $B$  sont  $(-a, 0, 0)$  (figure 54).

Une source lumineuse ponctuelle monochromatique, de longueur d'onde  $\lambda$ , située à l'infini sur l'axe  $z'Oz$  (du côté des  $z$  négatifs) émet une onde pour laquelle on adoptera une représentation scalaire : la «grandeur lumineuse»  $s$ . L'indice du milieu de propagation est égal à 1.

**1.1.** Énoncer le principe de Huygens–Fresnel<sup>17</sup> dans le cas de la diffraction à l'infini.

**1.2.** On suppose  $b \gg \lambda$ . Montrer que l'intensité lumineuse diffractée à l'infini par la fente, dans la direction de vecteur unitaire  $\vec{u}$  peut s'écrire

$$I = I_0 \left( \frac{\sin \frac{\pi 2a\alpha}{\lambda}}{\frac{\pi 2a\alpha}{\lambda}} \right)^2 \quad (36)$$

où  $\alpha$  est la composante sur  $Ox$  du vecteur  $\vec{u}$ .

**1.3.** On donne, sur la figure 55, le graphe de la fonction  $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$ . Tracer l'allure du graphe de  $I/I_0$  en fonction de  $\alpha$ .

On observe la figure de diffraction à l'infini, obtenue à l'aide de la fente précédente, dans le plan focal image d'une lentille convergente  $L$ . La distance focale de  $L$  est  $f'$  et son centre optique  $O'$ . Son axe

---

17. Augustin-Jean Fresnel (1788-1827)

optique coïncide avec  $Oz$ . On considère, dans le plan focal de la lentille, un axe  $X'F'X$  parallèle à  $x'Ox$  (figure 56).

**1.4.** Sachant que la lentille est utilisée dans les conditions de Gauss, montrer qu'à une direction caractérisée par un vecteur unitaire  $\vec{u}$ , de composante  $\alpha$  sur l'axe  $x'Ox$ , il correspond, sur l'axe  $X'F'X$ , un point  $M'$  d'abscisse  $X$ . Exprimer  $X$  en fonction de  $f'$  et  $\alpha$ .

**1.5.** Décrire ce qui est observé dans le plan focal de la lentille. Donner en particulier la largeur du maximum principal d'intensité.

## 2. Pouvoir de résolution de la lunette

Dans le cas de la diffraction par une ouverture circulaire de rayon  $R$ , l'expression de la largeur du maximum principal se déduit de l'expression obtenue précédemment en remplaçant la grandeur  $\alpha$  par  $\frac{R}{1,22}$ . La figure de diffraction possède la même symétrie que celle de l'ouverture circulaire.

**2.1.** On considère un objet ponctuel situé à l'infini, sur l'axe optique de la lunette, émettant une radiation monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$ .

Compte tenu des phénomènes de diffraction dus à la monture de l'objectif, comment apparaît, en fait, l'image objective de cet objet? On pourra pour cela considérer la monture de l'objectif comme une ouverture circulaire découpée dans un écran opaque et située légèrement en avant de la lentille  $L_1$ .

**2.2.** On considère deux objets ponctuels indépendants situés à l'infini, émettant deux ondes monochromatiques de même longueur d'onde  $\lambda$ . Soit  $\theta$  l'angle sous lequel sont vus ces deux objets en l'absence de lunette.

En adoptant le critère de Rayleigh, déterminer la plus petite valeur de  $\theta$  pour laquelle on pourra distinguer, avec la lunette, les images de ces objets.

Commenter ce résultat en prenant en compte le pouvoir séparateur de l'œil.

### **2.3. Commentaires**

**2.3.1.** Proposer une modification du système optique précédent qui permette de réaliser un cliché photographique de l'image de l'objet lointain.

**2.3.2.** L'observation d'objets lointains peut-elle se faire avec d'autres systèmes optiques? Donner un exemple et le décrire succinctement.

**2.3.3.** Dernièrement, un télescope a été placé sur un satellite. Quel est l'intérêt d'un tel choix?

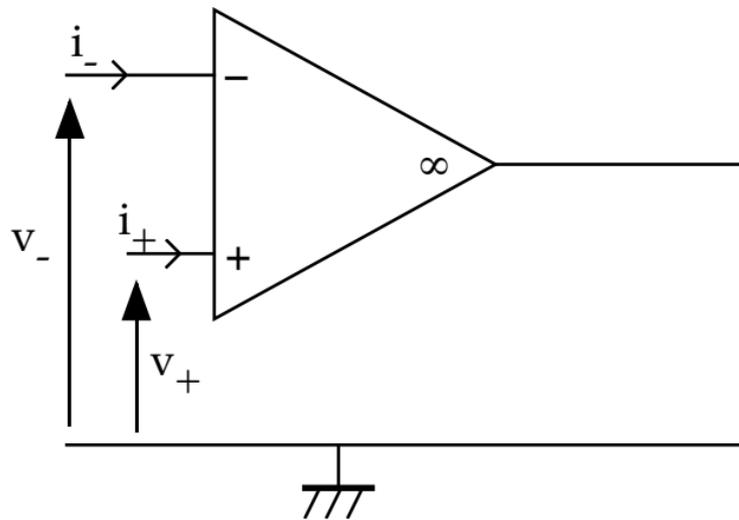


FIG. 47: *l'amplificateur opérationnel*:  $v_+ = v_-$ ;  $i_+ = i_- = 0$ .

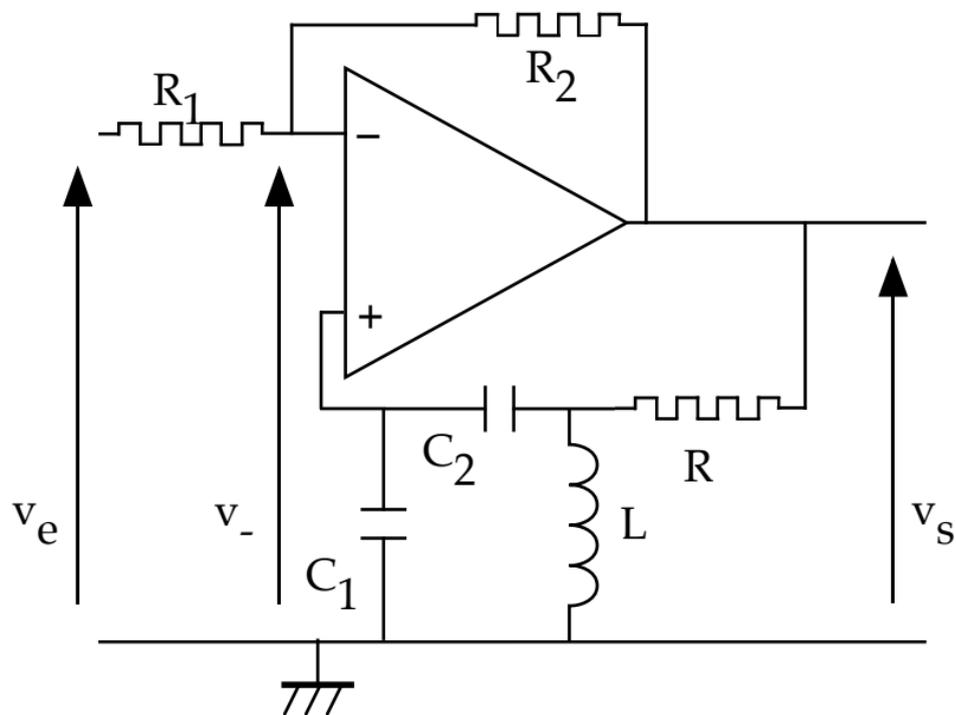
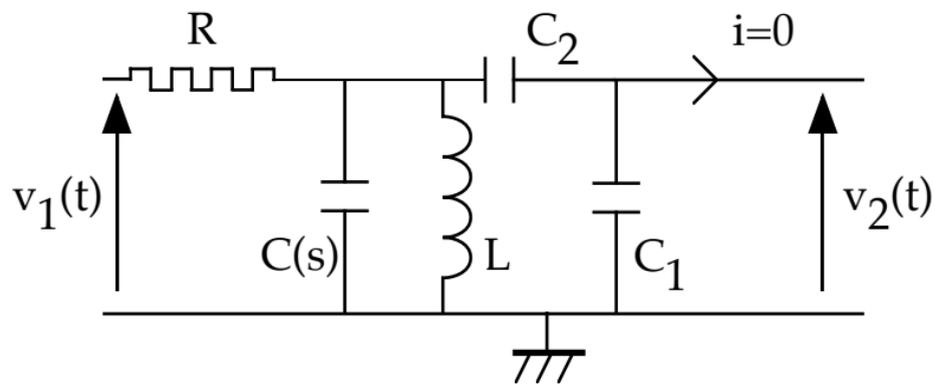


FIG. 48: montage avec l'amplificateur opérationnel.

FIG. 49: *le nouveau quadripôle.*

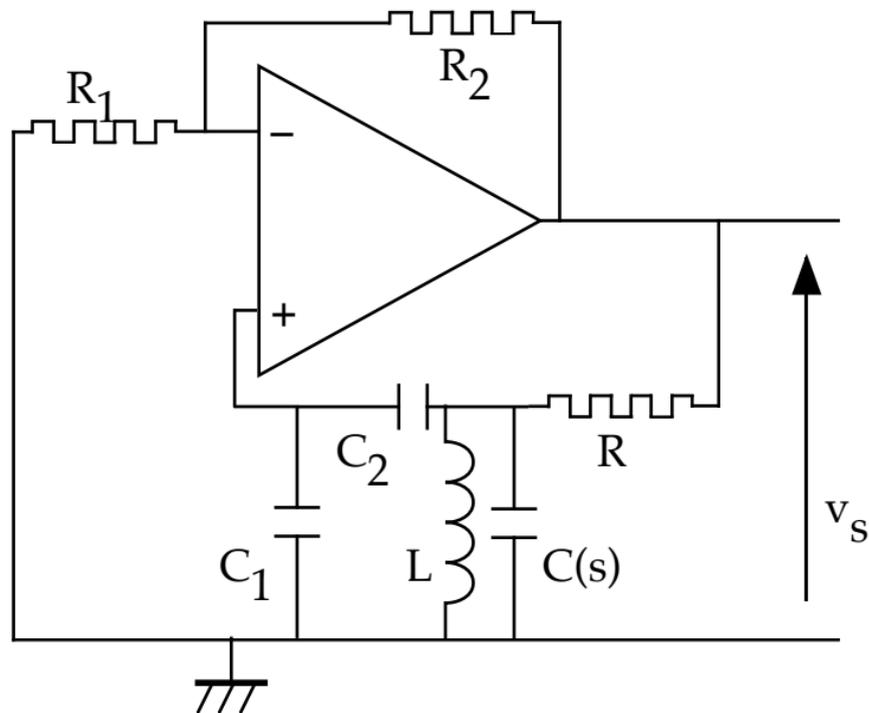
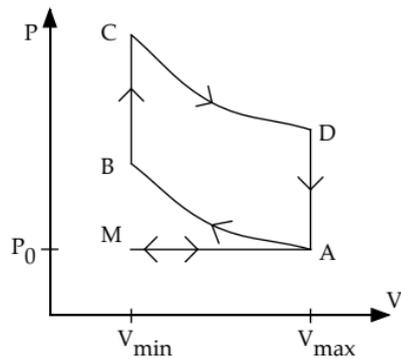
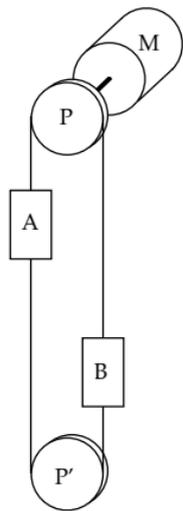
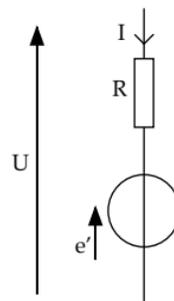
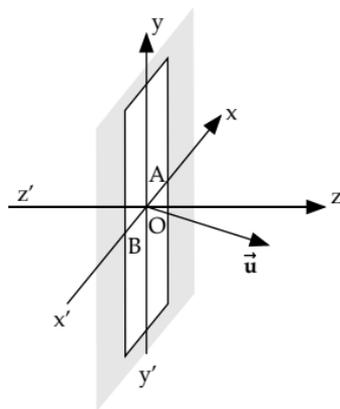


FIG. 50: montage de la «varicap».

FIG. 51: *le cycle de Beau de Rochas.*

FIG. 52: *l'ascenseur.*FIG. 53: *modèle du moteur.*

FIG. 54: *la fente fine.*

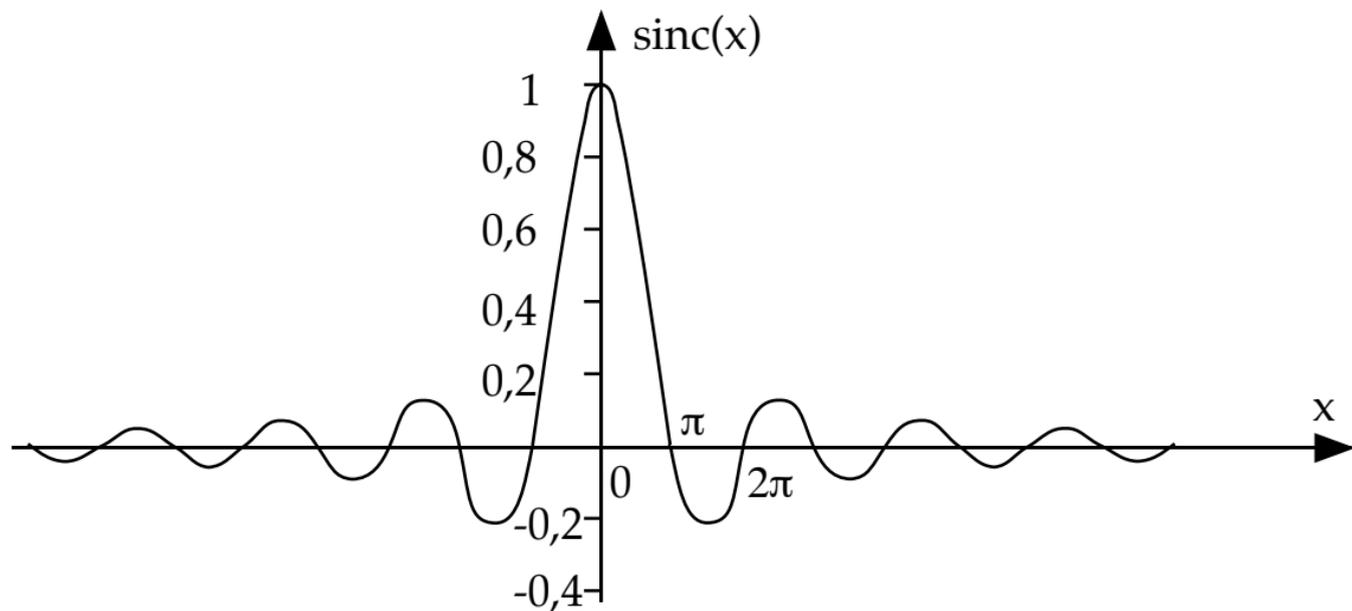
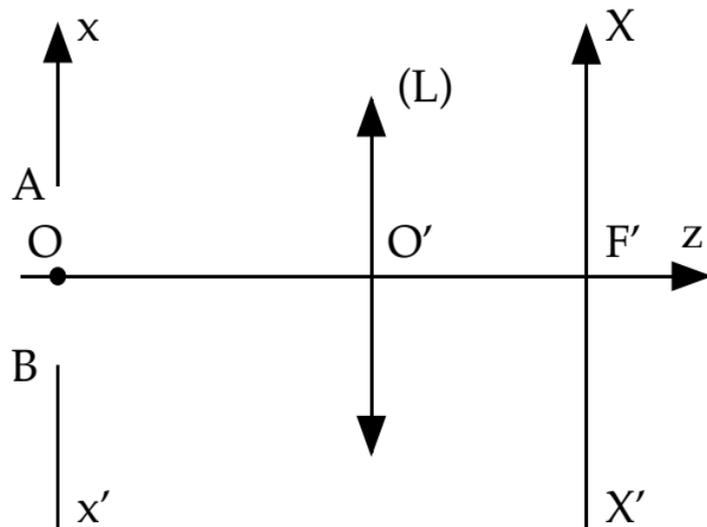


FIG. 55: la fonction «sinus cardinal»  $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$ .

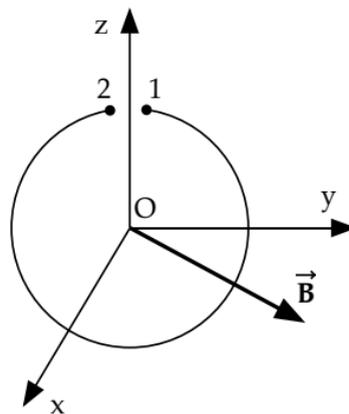
FIG. 56: *montage de la lentille.*

# 1997 (incomplet)

## DEUXIEME PARTIE

### C. Production d'énergie électrique à partir d'un champ magnétique

- I. Une bobine plane, dont les bornes sont notées 1 et 2, comportant  $N$  spires, d'aire  $s$ , est maintenue fixe dans le plan  $(O, Oy, Oz)$ . Elle est placée dans un champ magnétique  $\vec{B}$ , de module  $B$  constant, tournant autour de  $Oz$ , dans le plan  $(O, Ox, Oy)$  avec la vitesse angulaire  $\omega$  constante. A la date  $t = 0$ , le champ présente la direction et le sens de  $Ox$ .



- Ce champ magnétique est créé par une (ou des) bobine(s) tournante(s) fixée(s) sur un rotor.
1. En circuit ouvert, établir l'expression de la tension  $u_0(t) = V_2 - V_1$ .
  2. La bobine est maintenant fermée sur une charge. La résistance totale du circuit fermé ainsi réalisé est  $R$ . On ne tiendra pas compte de l'inductance de ce circuit.
- 2.1. Établir l'expression de l'intensité  $i(t)$  du courant mesurée de 1 vers 2 à l'extérieur de la bobine.

- 2.2.** Quel couple faut-il exercer sur la bobine pour la maintenir immobile dans le champ?
- 2.3.** On suppose que la loi *de l'action et de la réaction (ou des actions mutuelles)* est applicable dans ce cas de forces magnétiques. En supposant qu'il n'y a pas de frottement,
- quel couple le milieu extérieur doit-il exercer sur le rotor et quelle puissance moyenne le milieu extérieur fournit-il au rotor?
  - exprimer la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans ce circuit en utilisant la résistance totale  $R$ ;
  - à l'aide d'un bilan énergétique, exprimer cette même puissance en utilisant le couple exercé par le milieu extérieur sur le rotor. Que peut-on conclure sur la validité de l'hypothèse de départ concernant la loi de l'action et de la réaction?
- II.** Quel nom donne-t-on habituellement à la loi  $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ ? Quel phénomène traduit-elle? Dans quel siècle a-t-elle été découverte? Citer deux appareils ou dispositifs actuels (d'usage domestique ou industriel) utilisant ce phénomène.

### III. Production d'énergie électrique

Dans les centrales de production d'électricité, en France, les *alternateurs* produisent des tensions sinusoïdales de fréquence  $f = 50$  Hz.

1. Quelles sont la période et la pulsation de la tension produite? Si la tension efficace est de 220 V, écrire la relation liant la tension  $u$  et la date  $t$ .
2. Le texte ci-dessous est extrait du *cours de Physique de Feynman*<sup>18</sup>, (Electromagnétisme 1, InterEditions):

Qu'est ce que le barrage de Boulder? Une énorme rivière est arrêtée par un mur de béton. Mais quel mur! Ayant la forme d'une courbe parfaite qui est réalisée très soigneusement de sorte que la plus petite quantité de béton retient une rivière entière. Il s'élargit à la base suivant cette forme merveilleuse qu'aiment les artistes, mais que les ingénieurs peuvent apprécier parce qu'ils savent qu'un tel élargissement est lié à l'accroissement de pression avec la profondeur de l'eau. Mais nous sommes en train de nous éloigner de l'électricité.

L'eau de la rivière est alors déviée dans un énorme tuyau. C'est en soi une belle réalisation d'ingénieur. Le tuyau amène l'eau à une *roue à eau* – une énorme turbine – et fait tourner les roues. (Encore un exploit d'ingénieur.) Mais pourquoi faire tourner des roues? Elles sont couplées à un mélange de fer et de cuivre excessivement compliqué, tout tordu et entremêlé. En deux parties, une qui tourne et l'autre qui ne tourne pas. Toute une combinaison complexe

---

18. Richard Phillips Feynman (1918-1988)

d'un petit nombre de matériaux, principalement du fer et du cuivre, mais aussi du papier et de la laque pour isoler. Un monstre tournant. Un générateur...

Expliquer en quelques phrases, au niveau Second Cycle de lycée, le principe de fonctionnement d'une telle centrale et l'utilisation des expressions « *Un monstre tournant. Un générateur.* »

- Que représente les « *deux parties – une qui tourne et l'autre qui ne tourne pas* »?
- Quels sont les rôles « *du fer et du cuivre* »?
- Qu'entend-on par « *alternateur* »?

### 3. Turbine à vapeur dans une centrale de production

Une turbine à vapeur, actionnée par un moteur thermique, entraîne le rotor de l'alternateur qui produit le champ tournant.

Dans ce moteur thermique, de l'eau décrit un cycle de transformations. L'eau reçoit le transfert thermique  $Q_0$  (ou chaleur  $Q_0$ ) d'une *chaudière* ou *source de chaleur* et fournit pendant la même durée le travail  $W$  à la turbine.

#### 3.1. Définir le rendement $r_m$ de ce moteur thermique.

**3.2.** Désigner, en justifiant le choix, l'affirmation correcte, parmi les deux phrases :

1. En éliminant tous les frottements et les fuites thermiques, on obtiendra le rendement du moteur thermique égal à 1.
2. Il est impossible d'obtenir le rendement du moteur thermique égal à 1, même en l'absence de tout frottement et de fuites thermiques.

**4.** Dans la centrale nucléaire de production d'électricité du Blayais, le long de l'estuaire de la Garonne, l'eau de refroidissement prélevée dans l'estuaire subit en circulant dans le condenseur une élévation de température de  $10^\circ\text{C}$ .

Dans l'une des tranches, l'alternateur fournit la puissance électrique  $P = 900$  MW. Les rendements de l'alternateur et du moteur thermique actionnant la turbine sont respectivement  $r_0 = 0,95$  et  $r_m = 0,36$ .

**4.1.** Pourquoi faut-il un condenseur ?

**4.2.** Exprimer la puissance  $P_e$  reçue par l'eau de refroidissement en fonction de  $P$ ,  $r_0$  et  $r_m$

**4.3.** Évaluer le débit  $D_e$  en  $\text{kg s}^{-1}$  de l'eau de refroidissement nécessaire au fonctionnement d'une tranche.

Commenter cette valeur.

La capacité thermique massique de l'eau liquide est  $c = 4,18 \cdot 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ .

# 1999 (incomplet)

## Partie A. Champs et interactions



Cette partie est corrigée page **363**.

### *Données*

- Constante du champ de gravitation:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ ;
- Permittivité du vide:  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$ ;

– Charge électrique élémentaire:  $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$  C ;

### I. Forces centrales.

1. On considère deux objets ponctuels de masse  $m_1$  et  $m_2$ , situés à une distance  $r$  l'un de l'autre, aux points  $M_1$  et  $M_2$ .
  - a. Exprimer la force  $\vec{f}$  d'interaction exercée par  $m_1$  sur  $m_2$ . On notera  $\vec{u}$  le vecteur unitaire dirigé de  $M_1$  vers  $M_2$ .

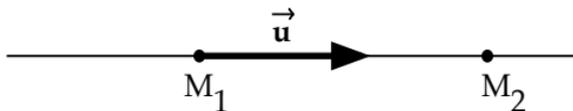


FIG. 57: vecteur unitaire  $\vec{u}$

- b. Montrer que si  $m_1$  est une masse à symétrie sphérique de centre  $M_1$ , la relation précédente est vérifiée à l'extérieur de la sphère (on pourra utiliser le théorème de Gauss).

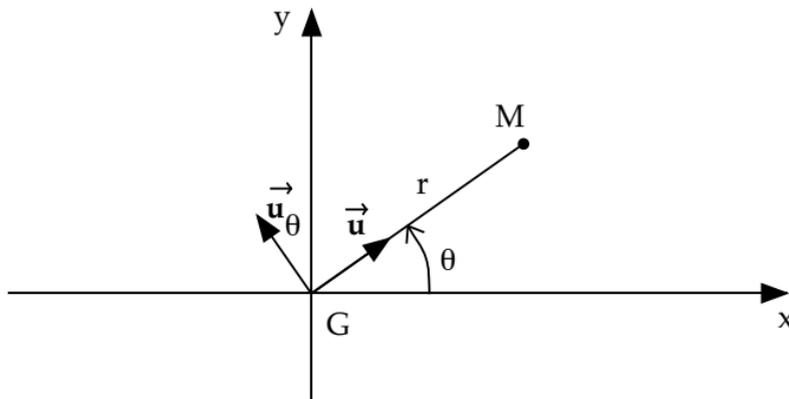
- c. Etablir l'expression de l'énergie potentielle  $E_p$  du système constitué des masses  $m_1$  et  $m_2$ . On choisira comme convention que l'énergie potentielle s'annule lorsque les masses sont infiniment distantes.
2. On considère le système isolé constitué de deux objets ponctuels de masses  $m_1$  et  $m_2$ , situés en  $M_1$  et  $M_2$  dans un référentiel galiléen  $R$ . On associe à  $R$  l'origine  $O$  et la base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ .
- a. On note  $G$  le centre d'inertie du système. Exprimer le vecteur  $\overrightarrow{OG}$  en fonction de  $\overrightarrow{OM_1}$  et  $\overrightarrow{OM_2}$ .
- b. Préciser en le justifiant le mouvement du point  $G$  dans le référentiel  $R$ . En déduire que le référentiel barycentrique  $R_G$  est galiléen.
- c. On note  $\vec{f}_2$  la force qu'exerce la masse  $m_1$  sur la masse  $m_2$  et  $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r} = r\vec{u}$ . Etablir la relation :

$$\mu \left( \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right)_{R_G} = \vec{f}_2, \quad (37)$$

dans laquelle on établira l'expression de la masse réduite  $\mu$  en fonction de  $m_1$  et  $m_2$ .

3. Dans la suite de cette partie I, on se place dans le référentiel barycentrique  $R_G$ .

- a. L'objet de masse  $m_1$  se déplace à la vitesse  $\vec{v}_1$  et l'objet de masse  $m_2$  à la vitesse  $\vec{v}_2$ . Etablir l'expression du moment cinétique  $\vec{\sigma}_N$  de l'ensemble du système par rapport à un point  $N$  quelconque. Montrer que sa valeur est indépendante de la position du point  $N$ . On notera  $\vec{\sigma}$  ce moment cinétique.
- b. On pose  $\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$  et  $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{M_1M_2} = r\vec{u}$ . Montrer que  $\vec{\sigma} = \mu \overrightarrow{GM} \wedge \vec{v}$ .
- c. Justifier que :
- le moment cinétique est conservé;
  - le mouvement est plan.
- d. Dans le plan de la trajectoire, orienté par le moment cinétique, on note  $(r, \theta)$  les coordonnées polaires du vecteur  $\overrightarrow{GM}$  et  $\vec{u}_\theta$  le vecteur unitaire directement orthogonal à  $\vec{u}$  (voir la figure 58).
- Montrer que  $C = r^2 \frac{d\theta}{dt}$  est constant au cours du temps. Justifier le nom de constante des aires donnée à la grandeur  $C/2$ .

FIG. 58: *plan de la trajectoire*

- e. Donner l'expression de l'énergie cinétique  $E_c$  du système constitué par les deux objets. Montrer que cette expression est identique à celle obtenue pour un objet de masse  $\mu$  se déplaçant à la vitesse  $\vec{v}$ . Exprimer  $E_c$  en utilisant les coordonnées polaires. En déduire que

$$E_c = \frac{1}{2}\mu \left[ \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{C^2}{r^2} \right]. \quad (38)$$

- f. Ecrire l'expression de l'énergie mécanique du système.
4. On considère le système constitué d'un noyau atomique de masse  $M$ , de charge  $Ze$ , et d'une particule  $\alpha$  (noyau d'hélium), de masse  $m$  et de charge  $2e$ .

L'interaction gravitationnelle peut être négligée devant l'interaction électrostatique; le justifier en considérant  $M = 3,27 \cdot 10^{-25}$  kg,  $Z = 79$  et  $m = 6,65 \cdot 10^{-27}$  kg.

Par analogie avec les résultats précédents, donner l'expression de l'énergie mécanique du système.

## II. Application : Diffusion de Rutherford.

1. Expliquer, en quelques lignes et un schéma, le principe et l'intérêt historique de la diffusion de particules  $\alpha$  lors de la traversée de feuilles métalliques très minces. Dater approximativement ces expériences.
  2. Une particule  $\alpha$  de masse  $m = 6,65 \cdot 10^{-27}$  kg animée à l'infini d'une vitesse  $v_0 = 1,2 \cdot 10^6$  m s<sup>-1</sup> s'approche du noyau d'un atome d'or, initialement au repos, de masse  $M = 3,27 \cdot 10^{-25}$  kg, de numéro atomique  $Z = 79$ . Le paramètre d'impact est  $b$  (voir figure 59).
- a. Donner sans démonstration la nature de la trajectoire. Schématiser celle-ci en faisant figurer la position de l'atome d'or.

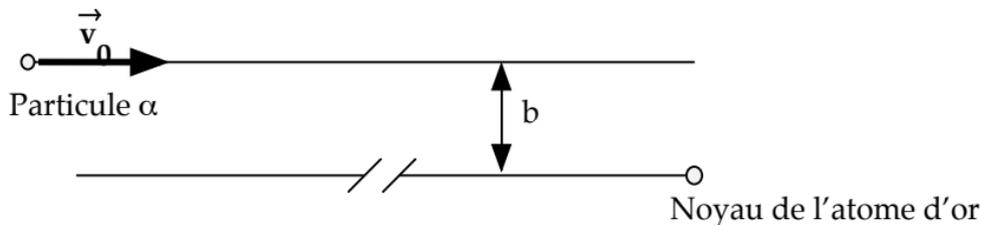


FIG. 59: paramètre d'impact

- b. On justifiera l'approximation : masse de la particule  $\alpha$  voisine de la masse réduite  $\mu$ .
- c. La particule  $\mu$  est déviée de  $\Phi = \pi/3$  rad par rapport à sa direction initiale. En déduire le paramètre d'impact  $b$ . On utilisera la relation suivante donnant l'angle de déviation  $\Phi$  :

$$\tan \frac{\Phi}{2} = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 mbv_0^2}. \quad (39)$$

- d. Sur le schéma demandé en a, représenter la position de la particule  $\alpha$  et son vecteur vitesse correspondant à la distance minimale d'approche  $r_m$  entre le noyau d'or et la particule  $\alpha$ . Calculer  $r_m$ .

# CORRIGES

# 1988 (incomplet)

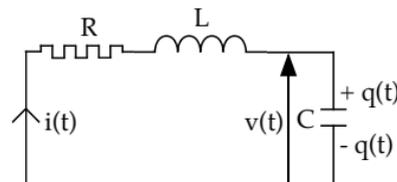
## A. Régime transitoire d'un circuit R, L, C.



L'énoncé de cette partie se trouve page 15.

1. En tenant compte des orientations indiquées sur le schéma, si  $q(t) > 0$  alors  $v(t) > 0$  et si  $i(t) > 0$  alors  $q(t)$  est croissant :

$$q(t) = Cv(t), \quad i(t) = \frac{dq}{dt}(t). \quad (40)$$



2. Pour une résistance  $R$  nulle, lorsque  $i(t)$  décroît,  $v(t) > 0$  :

$$v(t) = -L \frac{di}{dt} = -L \frac{d^2q}{dt^2} = -LC \frac{d^2v}{dt^2}. \quad (41)$$

D'où l'équation différentielle à laquelle satisfait  $v(t)$  :

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \omega_0^2 v = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}. \quad (42)$$

La solution générale de l'équation (42) est

$$v(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t. \quad (43)$$

A l'instant initial,  $v(0) = A = V_0$  et  $i(0) = C \frac{dv}{dt}(0) = C\omega_0 B = 0$ . La tension est donc

$$v(t) = V_0 \cos \omega_0 t. \quad (44)$$

**3.a.** Pour une résistance  $R$  non nulle, au lieu de l'équation (41) on a :

$$v(t) = -Ri - L \frac{di}{dt} = -R \frac{dq}{dt} - L \frac{d^2q}{dt^2} = -RC \frac{dv}{dt} - LC \frac{d^2v}{dt^2}. \quad (45)$$

D'où l'équation différentielle à laquelle satisfait  $v(t)$  :

$$LC \frac{d^2v}{dt^2} + RC \frac{dv}{dt} + v = 0, \quad (46)$$

ou encore, avec les notations de l'énoncé :

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2\lambda\omega_0 \frac{dv}{dt} + \omega_0^2 v = 0. \quad (47)$$

**3.b.** On discute les régimes d'évolution possibles en cherchant les solutions  $v(t) = \exp(rt)$  de l'équation (47).  $r$  est solution de l'équation caractéristique :

$$r^2 + 2\lambda\omega_0 r + \omega_0^2 = 0. \quad (48)$$

S'il y a 2 racines réelles distinctes, ces racines sont négatives et l'équation (47) a deux solutions exponentielles décroissantes : le régime est apériodique.

S'il y a 2 racines complexes, l'équation (47) a deux solutions sinusoidales amorties.

Le cas où il y a une racine double réelle est examiné dans la question suivante.

- 3.c.** La résistance critique  $R_c$  est la résistance  $R$  telle que l'équation (48) a une racine double. On a alors  $\lambda = 1$ . D'où

$$R_C = 2L\omega_0 = 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (49)$$

On peut préciser les réponses de la question précédente.

- Le régime apériodique correspond à  $R > R_C$ .
  - Le régime sinusoïdal amorti correspond à  $R < R_C$ .
  - Le régime apériodique critique correspond à  $R = R_C$ .
- 4.** Dans l'état final ( $t \rightarrow \infty$ ) du système  $v = 0$ ,  $i = 0$  et  $q = 0$ . L'énergie dissipée par effet Joule<sup>19</sup> au cours du régime transitoire est donc l'énergie initiale

$$W = \frac{1}{2}CV_0^2. \quad (50)$$

---

19. James Prescott Joule (1818-1889)

## B. Oscillations forcées d'un circuit R, L, C.



L'énoncé de cette partie se trouve page 18.

1. Pour le nouveau circuit, l'équation (45) est modifiée en :

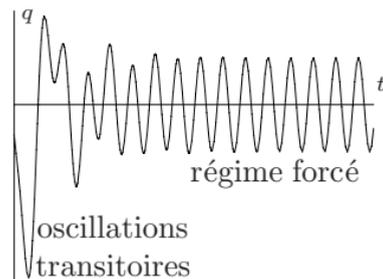
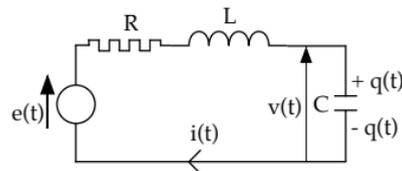
$$v(t) = -RC \frac{dv}{dt} - LC \frac{d^2v}{dt^2} + e(t). \quad (51)$$

L'équation différentielle à laquelle satisfait  $q(t) = Cv(t)$  est

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{e(t)}{L}. \quad (52)$$

ou :

$$\ddot{q} + 2\lambda\omega_0\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{e(t)}{L}. \quad (53)$$



2. Le *régime forcé* correspond à une solution particulière  $q_f(t)$ , sinusoïdale et de pulsation  $\omega$ , de l'équation

(avec second membre) (53). La solution générale de l'équation (53) est la somme  $q(t) = q_f(t) + q_H(t)$  de cette solution particulière et de la solution générale  $q_H(t)$  de l'équation homogène (47) (sans second membre) associée à l'équation (53). Les solutions  $q_H(t)$  de l'équation (47), étudiées dans la section **A**, s'amortissent (on suppose  $R > 0$ ). La solution  $q(t) = q_f(t) + q_H(t)$  correspondant à des conditions initiales particulières à l'instant  $t = 0$  va, après un temps  $\tau$  où la partie  $q_H(t)$  est devenue négligeable, se réduire à la solution forcée  $q_f(t)$ .

Il semble possible de donner deux définitions différentes du *régime transitoire*:

- c'est la partie  $q_H(t)$  de  $q(t)$  (transitoire pris dans le sens de « qui ne dure pas »); cette définition correspond au titre de la section **A**;  $q_H(t)$  s'appelle aussi *oscillation propre* ou *oscillation transitoire* quand  $R < R_C$ ;
- c'est la solution  $q(t)$  pendant le temps  $0 \leq t \lesssim \tau$  quand elle diffère notablement de  $q_f(t)$  (transitoire pris dans le sens de « qui remplit l'espace de temps entre deux états »); avec cette définition, le régime permanent succède au régime transitoire.

**3.1.** On introduit aussi les grandeurs complexes  $\underline{q} = \frac{1}{j\omega} \dot{i}$  et  $\underline{v} = \frac{1}{C} \underline{q}$  associées à  $q(t)$  et à  $v(t)$  respectivement.

L'équation (52) donne

$$\left( -\omega^2 + j\frac{R}{L}\omega + \frac{1}{LC} \right) \underline{q} = \frac{1}{L} \underline{e}. \quad (54)$$

D'où

$$\underline{z} = \frac{\underline{e}}{\underline{i}} = \frac{\underline{e}}{j\omega \underline{q}} = \frac{L}{j\omega} \left( -\omega^2 + j\frac{R}{L}\omega + \frac{1}{LC} \right) = R + j \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right). \quad (55)$$

**3.2.** Le module de  $\underline{e}/\underline{z}$  est

$$i_m = \frac{e_m}{\sqrt{R^2 + \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}}. \quad (56)$$

L'argument de  $\underline{e}/\underline{z}$  est  $\phi + \omega t$  :

$$\phi = -\arg \left[ R + j \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right]. \quad (57)$$

$\phi$  est donc défini par

$$\tan \phi = -\frac{1}{R} \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, \quad (58)$$

où le cas limite  $\phi = -\frac{\pi}{2}$  correspond à  $\omega \rightarrow \infty$  et  $\phi = \frac{\pi}{2}$  à  $\omega \rightarrow 0$ .

**3.3.a.** La résonance d'intensité correspond au maximum de  $i_m$  lorsqu'on fait varier la pulsation  $\omega$  ( $e_m$  restant constant) .

**3.3.b.** Ce maximum est obtenu lorsque le dénominateur dans l'équation (56) est minimum, soit pour

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \quad \text{ou} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0. \quad (59)$$

**3.3.c.** Le circuit  $RLC$  à la résonance est équivalent à une résistance pure  $R$ .

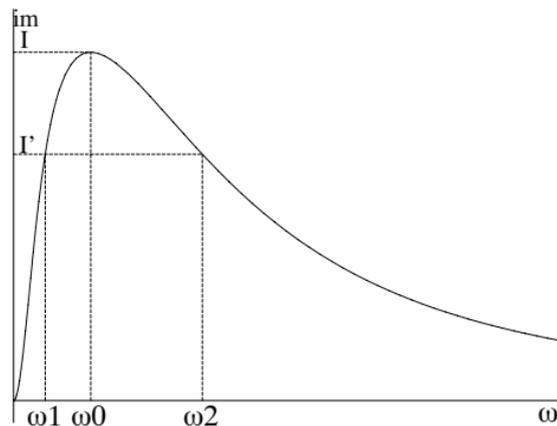
**3.4.a.**  $i_m$  atteint son maximum  $I = e_m/R$  pour  $\omega = \omega_0$  et tend vers 0 pour  $\omega \rightarrow \infty$  et  $\omega \rightarrow 0$ .

**3.4.b.** Soient  $\omega_1$  et  $\omega_2$  ( $\omega_1 < \omega_0 < \omega_2$ ) les pulsations telles que

$$i_m(\omega_1) = i_m(\omega_2) = \frac{I}{\sqrt{2}} = I'. \quad (60)$$

La bande passante est

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1. \quad (61)$$



$\omega_1$  et  $\omega_2$  sont les racines de l'équation

$$\frac{e_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} = \frac{e_m}{R\sqrt{2}} \Rightarrow R^2 = \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 \quad (62)$$

$$\Rightarrow \pm R = L\omega - \frac{1}{C\omega} \Rightarrow \omega^2 \mp \frac{R}{L}\omega - \frac{1}{LC} = 0 \quad (63)$$

Les racines positives donnent

$$\omega_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}, \quad \omega_2 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}, \quad (64)$$

et la bande passante est

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}. \quad (65)$$

**3.4.c.** Le facteur de qualité est

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (66)$$

Il est inversement proportionnel à  $R$ . Il est d'autant plus grand que la bande passante du circuit est étroite.

**4.1.** Comme  $\underline{v}_L = jL\omega\underline{i}$ , le rapport  $\alpha$  est donné par (on utilise  $LC\omega^2 = LC\omega_0^2\theta^2 = \theta^2$  et  $\frac{R}{L\omega} = \frac{R}{L\omega_0\theta} = \frac{1}{Q\theta}$ )

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{u_m}{e_m} = \left| \frac{\underline{v}_L}{\underline{e}} \right| = \left| \frac{jL\omega\underline{i}}{\underline{z}\underline{i}} \right| = \frac{L\omega}{|\underline{z}|} = \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R}{L\omega}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{LC\omega^2}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{Q^2\theta^2} + \left(1 - \frac{1}{\theta^2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1 - 2Q^2}{Q^2\theta^2} + \frac{1}{\theta^4}}} = \frac{\theta^2}{\sqrt{1 - \frac{2Q^2 - 1}{Q^2}\theta^2 + \theta^4}}. \end{aligned} \quad (67)$$

**4.2.a.** D'après l'avant dernière forme de  $\alpha$  dans l'équation (67),  $\alpha$  admet un maximum si  $1 + \frac{1 - 2Q^2}{Q^2}x + x^2$

( $x = 1/\theta^2$ ) passe par un minimum. On a alors  $x = \frac{1}{\theta^2} = -\frac{1 - 2Q^2}{2Q^2}$ . Comme  $\theta^2 > 0$ , pour que  $\alpha$  admette

un maximum  $Q$  doit donc vérifier

$$Q > \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (68)$$

**4.2.b.** La valeur  $\theta_m$  correspondant à ce maximum est

$$\theta_m = \sqrt{\frac{2Q^2}{2Q^2 - 1}} \quad \text{ou } \theta_m \approx 1 + \frac{1}{4Q^2} \text{ pour } Q^2 \gg 1. \quad (69)$$

**4.2.c.** La valeur  $\alpha_m$  du maximum de  $\alpha$  est

$$\alpha_m = \frac{\theta_m^2}{\sqrt{\theta_m^4 - 1}} \quad \text{ou } \alpha_m \approx Q \text{ pour } Q^2 \gg 1. \quad (70)$$

**4.3.** Quand  $\theta \ll 1$ ,  $\alpha \approx \theta^2$ . La courbe  $\alpha(\theta)$  au voisinage de l'origine est parabolique.

4.4. Quand  $\theta \gg 1$ , d'après l'avant dernière forme de  $\alpha$  dans l'équation (67),

$$\alpha \approx \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1 - 2Q^2}{Q^2\theta^2}}} \approx 1 - \frac{1 - 2Q^2}{2Q^2} \frac{1}{\theta^2}. \quad (71)$$

On en déduit que  $\alpha(\theta) \rightarrow 1$  quand  $\theta \rightarrow \infty$ .

4.5. Quand  $\theta \ll 1$ ,

$$\alpha \approx \theta^2 \left[ 1 - \frac{1 - 2Q^2}{2Q^2} \theta^2 \right]. \quad (72)$$

On en déduit que la courbe  $\alpha(\theta)$  est au dessus de la courbe  $\alpha = \theta^2$  si  $Q > 1/\sqrt{2}$  (amortissement faible) ou au dessous si  $Q < 1/\sqrt{2}$  (amortissement fort). Si  $Q = 1/\sqrt{2}$ , on a au lieu de l'équation (72)

$$\alpha \approx \theta^2 \left[ 1 - \frac{1}{2} \theta^4 \right], \quad (73)$$

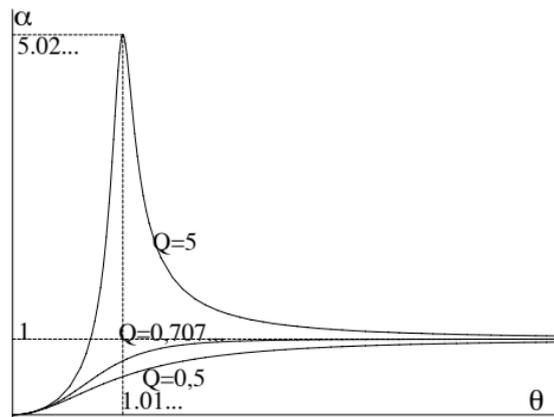
et la courbe  $\alpha(\theta)$  est au dessous de la courbe  $\alpha = \theta^2$ .

Quand  $\theta \rightarrow \infty$ , l'approximation (71) montre que la courbe  $\alpha(\theta)$  approche son asymptote  $\alpha = 1$  par le haut si  $Q > 1/\sqrt{2}$  ou par le bas si  $Q < 1/\sqrt{2}$ . Dans le cas limite  $Q = 1/\sqrt{2}$ ,

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\theta^4}}} \quad (74)$$

montre que la courbe  $\alpha(\theta)$  approche son asymptote  $\alpha = 1$  par le bas.

4.6. En plus des courbes  $\alpha(\theta)$  pour  $Q = 0,5$  et  $Q = 5$ , on a tracé la courbe correspondant au cas limite  $Q = 1/\sqrt{2}$ .



5.a. En régime forcé, pour  $\omega = \omega_0$ , l'énergie dissipée en une période  $T = 2\pi/\omega_0$  est

$$\Delta W = \int_0^T Ri^2 dt = \frac{e_m^2}{R} \int_0^T \sin^2(\omega t + \phi) dt = \frac{T e_m^2}{2R} = \frac{\pi e_m^2}{\omega_0 R}. \quad (75)$$

5.b. L'énergie maximale de la bobine est

$$W_L = \frac{1}{2}Li_m^2 = \frac{Le_m^2}{2R^2}. \quad (76)$$

5.c. L'énergie maximale du condensateur est

$$W_C = \frac{1}{2}Cv_m^2 = \frac{1}{2}C \left( \frac{i_m}{C\omega_0} \right)^2 = \frac{1}{2C\omega_0^2} \frac{e_m^2}{R^2} = \frac{Le_m^2}{2R^2} = W_L. \quad (77)$$

5.d. L'expression  $\beta$  vaut

$$\beta = 2\pi \frac{W_L}{\Delta W} = \frac{L\omega_0}{R} = Q. \quad (78)$$

Cette expression peut être considérée comme une autre définition possible du facteur de qualité.

## C. Régime transitoire d'un oscillateur mécanique.



L'énoncé de cette partie se trouve page 22.

1. A l'équilibre  $mg = ka$  ; l'allongement du ressort est alors

$$a = \frac{mg}{k}. \quad (79)$$

2. La somme des forces agissant sur  $M$  et mesurée selon la verticale est  $m\ddot{x} = -k(a + x) + mg - h\dot{x}$ .  
L'équation différentielle du mouvement de  $M$  est donc, compte tenu de l'équation (79),

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = 0. \quad (80)$$

3. Sans l'amortisseur  $D$  ( $h = 0$ ) l'équation différentielle du mouvement de  $M$  est

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (81)$$

et l'expression de  $x(t)$  telle que  $x(0) = X_0$  et  $\dot{x}(0) = 0$  est

$$x = X_0 \cos \omega_0 t. \quad (82)$$

On notera l'analogie avec la question **A.2**.

- 4.a. Avec l'amortisseur  $D$  on écrit l'équation différentielle du mouvement de  $M$  sous la forme

$$\ddot{x} + 2\mu\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (83)$$

qui est semblable à l'équation (47). D'après la question **A.3**, l'évolution de  $x(t)$  a lieu suivant

- le régime apériodique si  $\mu > 1$  ;
- le régime sinusoïdal amorti si  $\mu < 1$  ;
- Le régime apériodique critique si  $\mu = 1$ .

**4.b.** Le coefficient de frottement critique  $h_c$  correspond à  $\mu = 1$  :

$$h_c = 2m\omega_0 = 2\sqrt{km}. \quad (84)$$

**5.** On répond de façon semblable à la question **A.4**. L'énergie dissipée dans l'amortisseur  $D$  pendant le régime transitoire est l'énergie initiale

$$W = \frac{1}{2}kX_0^2. \quad (85)$$

# 1989 (incomplet)

## PREMIERE PARTIE: Horloges naturelles et mécaniques

### C. Etude d'une horloge à balancier



L'énoncé de cette partie se trouve page 31.

1. Les forces appliquées au pendule sont le poids, la réaction de l'axe, la poussée d'Archimède<sup>20</sup> et les frottements (axe et air).
2. S'il n'y a pas de frottements, l'énergie mécanique du pendule  $E_m = E_p + E_c$ , somme de l'énergie potentielle  $E_p$  et de l'énergie cinétique  $E_c$  du pendule, est conservée. L'énergie potentielle est

$$E_p = Mgl(1 - \cos \theta) \text{ où } l = OG, G \text{ centre d'inertie du pendule.} \quad (86)$$

L'énergie cinétique est

$$E_c = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad (87)$$

où  $J$  est le moment d'inertie du balancier par rapport à l'axe de rotation  $OY$ . La fonction  $\theta(t)$  décrivant le mouvement du pendule vérifie les conditions initiales

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = 0. \quad (88)$$

La conservation de l'énergie mécanique,

$$Mgl(1 - \cos \theta(t)) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}(t)^2 = Mgl(1 - \cos \theta_0), \quad (89)$$

---

20. Archimède de Syracuse (287-212 av. J.-C.)

implique que  $|\theta(t)| \leq \theta_0$  et que  $\dot{\theta}(t) = 0$  lorsque  $\theta(t) = \pm\theta_0$ ; à partir de  $t = 0$  la fonction  $\theta(t)$  décroît de  $\theta_0$  à  $-\theta_0$ , puis croît de  $-\theta_0$  à  $\theta_0$ , valeur atteinte à l'instant  $t = T$ . A cet instant  $T$ , on retrouve les conditions initiales (88)

$$\theta(T) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(T) = 0. \quad (90)$$

Le mouvement est donc périodique de période  $T$ .

*Nota :* Cette réponse suppose que le mouvement de  $\theta_0$  à  $-\theta_0$  ou de  $-\theta_0$  à  $\theta_0$  s'effectue en un temps fini (égal à  $T/2$ ); cela peut se montrer pour  $|\theta_0| < \pi$  à partir de l'équation (108).

- 3.a.** Le moment d'inertie d'un point matériel de masse  $m$  par rapport à l'axe  $Oy$  est  $I = mr^2$  où  $r$  est la distance du point à l'axe  $Oy$ . Le moment d'inertie d'un solide par rapport à l'axe  $Oy$  est

$$I = \int_V r^2 dm = \int_V r^2 \mu dV \quad (91)$$

où  $r$  est la distance de l'élément de masse  $dm = \mu dV$  à l'axe  $Oy$  et où on intègre dans le volume  $V$  du solide.

- 3.b.** Le moment d'inertie du disque par rapport à son axe de révolution est

$$J_d = \mu c \int_0^R r^2 2\pi r dr = 2\pi\mu c \frac{R^4}{4} = \mu\pi R^2 c \frac{R^2}{2} = M_d \frac{R^2}{2} \quad (92)$$

où  $M_d$  est la masse du disque.

A.N. :  $M_d = 236 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$ ,  $J_d = 290 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2$ .

**3.c.** Le moment d'inertie de la tige homogène ( $|z| \leq L/2$ ,  $|x| \leq a/2$ ,  $|y| \leq b/2$ ) par rapport à son axe de symétrie  $Oy$  est

$$\begin{aligned} J_t &= \int_V r^2 \mu dV = \int_V x^2 \mu dV + \int_V z^2 \mu dV \\ &= \mu L b \int_{-a/2}^{a/2} x^2 dx + \mu a b \int_{-L/2}^{L/2} z^2 dz = \mu L b \frac{a^3}{12} + \mu a b \frac{L^3}{12} = M_t \frac{L^2 + a^2}{12} \end{aligned} \quad (93)$$

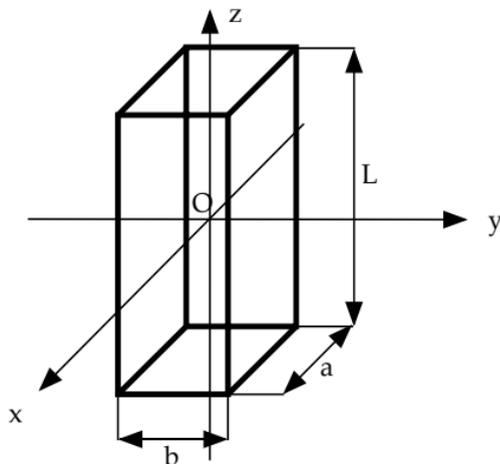
et, pour  $a^2 \ll L^2$ ,  $J_t \approx M_t \frac{L^2}{12}$ .

A.N. :  $M_t = 22,5 \cdot 10^{-3}$  kg,  $J_t = 42,4 \cdot 10^{-6}$  kg m<sup>2</sup>.

- 3.d.** On utilise le *théorème d'Huygens*<sup>a</sup> : Soit un solide de masse  $M$ , de centre de gravité  $G$  et  $GY$  l'axe parallèle à  $OY$  et passant par  $G$ . Le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe  $OY$  est

$$I_{OY} = I_{GY} + Md^2 \quad (94)$$

<sup>a</sup> Christiaan Huygens (1629-1695)



où  $I_{GY}$  est le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe  $GY$  et  $d$  est la distance de  $G$  à  $OY$ . Noter que le terme  $Md^2$  peut s'interpréter comme le moment d'inertie par rapport à l'axe  $OY$  d'un point matériel de masse  $M$  situé en  $G$ .

Le moment d'inertie  $J$  du balancier par rapport à l'axe de rotation  $OY$  est donc

$$J = J_t + M_t \left( \frac{L}{2} \right)^2 + J_d + M_d (L + R)^2 = M_t \left( \frac{L^2}{3} + a^2 \right) + M_d \left( \frac{R^2}{2} + (L + R)^2 \right). \quad (95)$$

3.e. A.N. :  $J = 9,90 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$ .

4. La poussée d'Archimède ( $= \mu_a V g$ ) est  $\frac{\mu_a V g}{\mu V g} = \frac{1,29}{7500} = 1,6 \cdot 10^{-4}$  fois plus petite que le poids. Elle est plus faible que l'incertitude sur le poids (l'incertitude relative sur la valeur de  $\mu$  donnée semble être de l'ordre de 1%).

5. Appliquons le théorème du moment cinétique ( $\vec{\sigma} = J\dot{\theta}\vec{u}_y$ )

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \vec{OG} \wedge \vec{g} \quad \text{soit} \quad J\ddot{\theta} = -Mgl \sin \theta \quad (96)$$

où

$$M = M_t + M_d, \quad l = \frac{M_t L/2 + M_d(L + R)}{M} = 18,9 \text{ cm}. \quad (97)$$

6. Si l'angle  $\theta_0$  est de l'ordre de quelques degrés, en radians  $\theta \ll 1$ ,  $\sin \theta \approx \theta$  et l'équation (96) se réduit à

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta \quad \text{où} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{Mgl}{J}}. \quad (98)$$

La solution générale est de la forme

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \phi). \quad (99)$$

C'est une oscillation harmonique de période

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{Mgl}}. \quad (100)$$

**7.a.** Pour intégrer l'équation différentielle (96), on la multiplie par  $\dot{\theta}$ :

$$J\dot{\theta}\ddot{\theta} + Mgl\dot{\theta}\sin\theta = 0 \quad (101)$$

$$\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + Mgl(\cos\theta_0 - \cos\theta) = 0. \quad (102)$$

On retrouve ainsi l'équation (89) qui exprime la conservation de l'énergie mécanique.

**7.b.** Entre les instants  $t = 0$  et  $t = T/4$ , l'angle du pendule décroît de  $\theta_0$  à 0 ( $d\theta/dt \leq 0$ ); l'équation (102) peut alors s'écrire

$$\frac{dt}{d\theta} = -\sqrt{\frac{J}{2Mgl}} \frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}. \quad (103)$$

On obtient le quart de période  $T/4$  en intégrant l'équation (103) de  $\theta_0$  à 0:

$$\frac{T}{4} = \int_{\theta_0}^0 \frac{dt}{d\theta} d\theta = \sqrt{\frac{J}{2Mgl}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}. \quad (104)$$

La période du pendule peut donc s'écrire

$$T = K \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} \quad \text{où} \quad K = 4\sqrt{\frac{J}{2Mgl}} = \frac{4}{2\pi\sqrt{2}}T_0 = \frac{\sqrt{2}}{\pi}T_0. \quad (105)$$

**7.c.** Dans l'intégrale (105), effectuons le changement de variable d'intégration  $\theta \rightarrow \phi$ . Quand  $\theta$  varie de 0 à  $\theta_0$ ,  $\phi$  varie de 0 à  $\pi/2$ . Utilisons (pour  $0 \leq \theta \leq \theta_0$ )

$$\begin{aligned} \cos\theta - \cos\theta_0 &= 2\left(\frac{1 - \cos\theta_0}{2} - \frac{1 - \cos\theta}{2}\right) = 2\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right) = 2\sin^2\frac{\theta_0}{2}(1 - \sin^2\phi) \\ &= 2\left(\sin\frac{\theta_0}{2}\cos\phi\right)^2 \end{aligned} \quad (106)$$

et

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\theta_0}{2}\sin\phi \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta = \sin\frac{\theta_0}{2}\cos\phi d\phi, \quad \cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{1 - \sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2\phi}. \quad (107)$$

L'équation (105) devient :

$$T = \frac{\sqrt{2}T_0}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2}\sin\frac{\theta_0}{2}\cos\phi} = \frac{T_0}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{2d\phi}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{2T_0}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2\phi}}. \quad (108)$$

Le développement jusqu'au deuxième ordre en  $\sin \frac{\theta_0}{2}$  puis en  $\theta_0$  donne la *formule de Borda*<sup>21</sup> :

$$T = T_0 \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left( 1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 \phi + \dots \right) d\phi = T_0 \left( 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \dots \right) \approx T_0 \left( 1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right). \quad (109)$$

*Nota* : (voir par exemple M. Abramowitz et I. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover 1972, pages 589–591) l'équation (108) de la période s'exprime en fonction de l'*intégrale elliptique du premier type* :

$$F(\phi \setminus \alpha) = \int_0^\phi \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}} \quad (110)$$

( $\alpha$  est l'*angle modulaire*) comme

$$T = T_0 \frac{2}{\pi} F \left( \frac{\pi}{2} \setminus \frac{\theta_0}{2} \right) = T_0 \frac{2}{\pi} K(m) \quad (111)$$

où la *forme complète*  $K(m) = F \left( \frac{\pi}{2} \setminus \frac{\theta_0}{2} \right)$  admet le développement en série

$$K(m) = \frac{\pi}{2} \left[ 1 + \left( \frac{1}{2} \right)^2 m + \left( \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 m^2 + \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 m^3 + \dots \right] \quad (112)$$

---

21. Jean Charles de Borda (1733-1799)

en fonction de  $m = \sin^2 \frac{\theta_0}{2}$ .

- 7.d.** La période  $T_0$  à Paris est  $T_0 = 0,903$  s. L'angle maximal  $\theta_{0m}$  tolérable si on veut que la période  $T$  diffère de moins de 1% de la période  $T_0$  est donné, d'après l'équation (109), par  $\frac{\theta_{0m}^2}{16} = 0,01$  soit

$$\theta_{0m} = 0,4 \text{ rad} = 22,9^\circ. \quad (113)$$

- 8.** L'avion ayant une accélération  $\vec{\Gamma}$  constante par rapport à la Terre, dans un référentiel lié à l'avion, il y a une force d'inertie d'entraînement parallèle à  $\vec{\Gamma}$ . Pour que ni la position d'équilibre, ni la période ne soient modifiées pendant le décollage il faut que le moment de cette force par rapport à  $OY$  soit nul. On placera donc  $OY$  parallèlement à  $\vec{\Gamma}$ .

**9.a.**

L'accélération de la pesanteur  $\vec{g}$  se décompose en

$$\vec{g} = \vec{g}_0 + \vec{\gamma} \quad (114)$$

où  $\vec{g}_0$  est le champ de gravitation et  $\vec{\gamma}$  l'accélération centrifuge.

–  $\vec{g}_0$  varie avec le lieu (la Terre n'est pas à symétrie sphérique) et l'altitude ;

–  $\vec{\gamma}$  dépend de l'altitude et de la latitude.

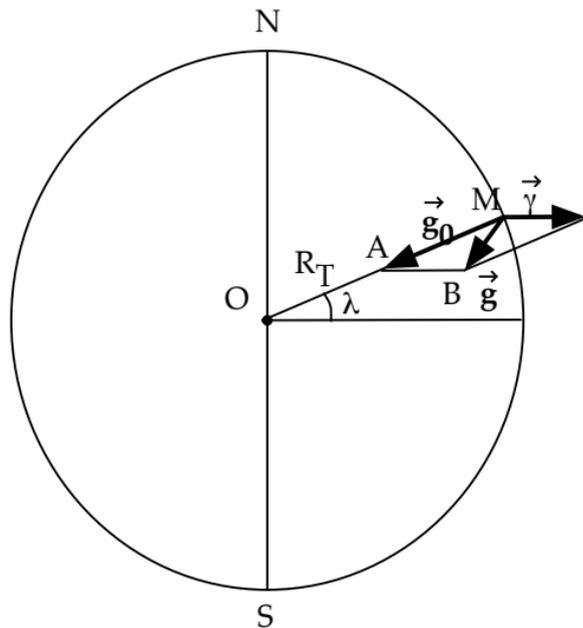
**9.b.α.** L'expression vectorielle de  $\vec{g}$  est donnée par l'équation (114). L'expression  $g_0 = GM_T/R_T^2$  représente le module de  $\vec{g}_0$  à l'altitude 0 dans le modèle de la Terre à symétrie sphérique. Dans ce modèle,  $\vec{g}_0$  est dirigé vers le centre de la Terre.

L'accélération centrifuge  $\vec{\gamma}$  est perpendiculaire à l'axe de rotation de la Terre, dans le sens qui s'éloigne de l'axe ; son module est

$$\gamma = (R_T \cos \lambda)\Omega^2 \text{ où } \Omega = \frac{2\pi}{86164} \text{ s}^{-1} \text{ est la vitesse angulaire de rotation de la Terre.} \quad (115)$$

Dans le triangle  $MAB$ ,  $\hat{A} = \lambda$ ,  $\vec{g}_0 = \overrightarrow{MA}$ ,  
 $\vec{\gamma} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{g} = \overrightarrow{MB}$ . Comme  $\gamma \ll g_0$ ,

$$\begin{aligned} g &= (g_0^2 + \gamma^2 - 2g_0\gamma \cos \lambda)^{1/2} \\ &\approx g_0 \left(1 - \frac{2\gamma}{g_0} \cos \lambda\right)^{1/2} \\ &\approx g_0 \left(1 - \frac{\gamma}{g_0} \cos \lambda\right) \\ &= g_0 - R_T \Omega^2 \cos^2 \lambda. \end{aligned} \quad (116)$$



**9.b.β.** *A.N.*:  $g_0 = GM_T/R_T^2 = 9,77 \text{ m s}^{-2}$ ;  $R_T \Omega^2 = 0,034 \text{ m s}^{-2}$  (on a bien  $\gamma \ll g_0$ );  $g_s = 9,77 - 0,034(\cos 1,36^\circ)^2 \text{ m s}^{-2} = 9,74 \text{ m s}^{-2}$ ;  $g_p = 9,77 - 0,034(\cos 48,85^\circ)^2 \text{ m s}^{-2} = 9,76 \text{ m s}^{-2}$ .

**9.b.γ.** En fait, les mesures effectuées donnent :  $g_s = 9,78 \text{ m s}^{-2}$  et  $g_p = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ . L'écart entre les valeurs mesurées et les valeurs calculées en  $\beta$  proviennent du fait que la Terre est ni homogène et ni à symétrie sphérique.

**9.b.δ.** La période  $T \propto \frac{1}{\sqrt{g}}$  est plus grande à Singapour qu'à Paris : l'horloge retarde. En valeur absolue,

$$\frac{T_s - T_p}{T_p} = \frac{\Delta T}{T} \approx \frac{\Delta g}{2g} = \frac{R_T \Omega^2}{2g_0} (\cos^2 \lambda_s - \cos^2 \lambda_p) = \frac{0,034}{2 \cdot 9,77} (1 - 0,43) = 0,98 \cdot 10^{-3}. \quad (117)$$

**10.a.** En impesanteur les forces d'inertie compensent les forces de gravitation. En impesanteur,

- l'horloge à balancier ne fonctionne pas ;
- la montre à quartz fonctionne correctement.

**10.b.** Sur la Lune, l'accélération de la pesanteur  $g_L \approx g_T/6$  est environ le sixième de sur la Terre. La période du balancier y est donc environ  $\sqrt{6}$  fois plus grande que sur la Terre. Sur la Lune,

- l'horloge à balancier retarde énormément ;

– la montre à quartz fonctionne correctement.

**11.a.** L'équation différentielle (96) du mouvement du balancier dans le cas des oscillations de faible amplitude devient en tenant compte du frottement :

$$J\ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} + Mgl\theta = 0, \quad \text{soit} \quad \ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \quad \text{où} \quad \lambda = \frac{\alpha}{2J}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{Mgl}{J}}. \quad (118)$$

**11.b.** L'équation caractéristique :

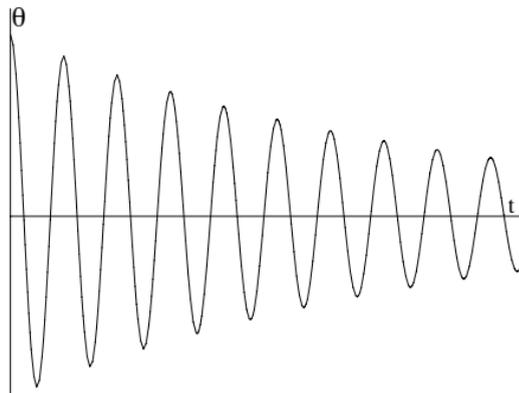
$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0 \quad (119)$$

a pour racines

$$r = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} = -\lambda \pm i\omega_0 \left(1 - \frac{\lambda^2}{\omega_0^2}\right)^{1/2} = -\lambda \pm i\omega. \quad (120)$$

L'influence des frottements reste faible si  $\lambda \ll \omega_0$ . On a alors  $\omega \approx \omega_0$  et le mouvement est une oscillation faiblement amortie. La solution générale est de la forme

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \phi) e^{-\lambda t}. \quad (121)$$



**11.c.** Le mécanisme d'une horloge fonctionnant correctement doit entretenir les oscillations pour compenser les frottements.

## TROISIEME PARTIE

### Quelques questions posées par la réalisation d'une horloge atomique



L'énoncé de cette partie se trouve page 44.

- 1.a. Atome dans un état excité :** A chaque état du mouvement des électrons autour du noyau correspond une valeur de l'énergie du système atomique. L'ensemble des états ayant une même énergie est appelé *niveau de l'atome*. Les énergies des niveaux forment une suite dénombrable de valeurs discrètes bornée inférieurement. Le niveau dont l'énergie est la plus basse est appelé *niveau fondamental*. L'état (ou chaque état en cas de niveau dégénéré) du niveau fondamental est un état stable. Les autres états sont les *états excités*, qui ont une durée de vie finie (états instables ou métastables).
- 1.b.** La fréquence  $\nu$  de l'onde électromagnétique émise par un atome qui se désexcite en passant de l'état 2 à l'état 1 est donnée par

$$h\nu = E_2 - E_1 \quad (122)$$

où  $E_i$  est l'énergie de l'état  $i$  ( $i = 1, 2$ ;  $E_2 > E_1$ ) et  $h$  est la constante de Planck<sup>22</sup>.

**1.c.** La longueur d'onde dans le vide est

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \approx \frac{3,00 \cdot 10^8}{9,19 \cdot 10^9} = 0,0326 \text{ m} = 3,26 \text{ cm.} \quad (123)$$

C'est une onde haute-fréquence (HF), dite onde centimétrique (radar, fours à micro-onde).

*Nota*: Des niveaux hyperfins correspondent à des états dont la fonction d'onde des électrons diffèrent peu et dont l'écart en énergie est dû à l'interaction entre le spin du noyau et les électrons.

**1.d.** La quantité de mouvement d'un photon de fréquence  $\nu$  est

$$p = \frac{h\nu}{c}. \quad (124)$$

L'énergie  $E$  et la quantité de mouvement  $p$  d'une particule libre de masse  $m$  sont liées par la relation  $E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$ . Pour un photon, cette relation s'applique avec  $E = h\nu$  et  $m = 0$ .

**1.e.** C'est le principe d'incertitude d'Heisenberg<sup>23</sup> (Il vaudrait mieux dire *inégalité d'Heisenberg*, car la relation

---

22. Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858-1947)

23. Werner Karl Heisenberg (1901-1976)

se démontre dans le cadre de la mécanique quantique)  $\Delta t \cdot \Delta E \gtrsim \frac{h}{2\pi}$ . Il s'applique à la désexcitation radiative avec  $\Delta E = h\Delta\nu$  ( $\Delta\nu$  largeur de la bande de fréquences émises) et  $\Delta t \sim \tau$  où  $A_{21} = 1/\tau$  est le coefficient d'Einstein<sup>24 25</sup> de la transition  $2 \rightarrow 1$ , donnant  $\Delta\nu \sim \frac{1}{2\pi\tau}$ .

**2.a.** Les atomes sont toujours en mouvement par rapport à l'observateur par suite de l'agitation thermique.

**2.b.** C'est l'effet Doppler<sup>26</sup>. Si la source et l'observateur sont en mouvement relatif, l'observateur mesure une fréquence différente de la fréquence émise.

Ce phénomène existe aussi pour les ondes sonores. Cet effet peut s'observer avec une moto. Le son est plus aigu (fréquence plus élevée) quand elle s'approche et plus grave quand elle s'éloigne.

**2.c.** Pour un gaz d'atomes, quand les distances entre atomes sont grandes devant le rayon atomique, l'émission d'un photon concerne un seul atome qui se désexcite indépendamment des autres atomes. On observe un spectre de raies.

---

24. [Albert Einstein \(1879-1955\)](#)

25.  $A_{21}$  est la probabilité par unité de temps d'émission spontanée d'un photon par désexcitation  $2 \rightarrow 1$ ; dans le cas où le niveau 2 ne peut se désexciter que vers le niveau 1,  $\tau = 1/A_{21}$  est la durée de vie du niveau 2

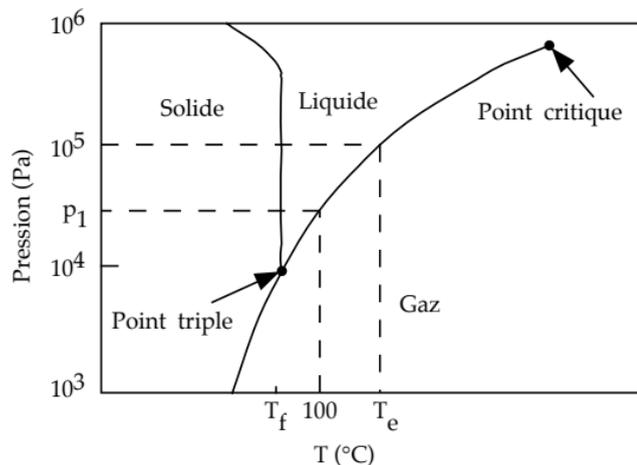
26. [Christian Andreas Doppler \(1803-1853\)](#)

Pour un gaz de molécules, l'émission d'un photon concerne une seule molécule. Les niveaux d'énergie de la molécule sont beaucoup plus serrés que ceux d'un seul atome. On observe déjà des spectres de bande (raies très proches les unes des autres).

Pour un corps solide, les niveaux d'énergie sont encore plus serrés que pour les molécules. En pratique, ils forment des bandes continues séparées de bandes interdites. On observe des spectres de bande.

## Etude d'un gaz mono-atomique

- 1.a. On a placé sur le diagramme de phase ( $T, P$ ) du césium, les données de l'énoncé (à la pression  $10^5$  Pa, la température de fusion  $T_f$  et d'ébullition  $T_e$ ). A la pression  $10^5$  Pa et à la température  $100^\circ\text{C}$  le césium est liquide. Il a donc fallu diminuer la pression en dessous de  $p_1$  (le point  $(T = 100^\circ\text{C}, p_1)$  est sur la courbe de coexistence liquide-gaz) pour que le césium soit effectivement à l'état de vapeur dans le four.



- 1.b.** La dispersion des vitesses due à l'effet Doppler et donc l'élargissement des raies sont plus faibles à 100°C qu'à 670°C. L'expérience est plus commode à réaliser à 100°C qu'à 670°C.
- 2.a.** Un gaz parfait est un grand nombre de particules (atomes ou molécules) dans un même volume. Les particules se comportent comme des points matériels sans mouvement interne (pas de vibration ou de rotation). Ce qui rend le gaz parfait est que les particules n'interagissent pas entre-elles. Toutefois, il faut faire une hypothèse supplémentaire, contradictoire avec les précédentes: les particules peuvent échanger de l'énergie entre elles (sinon, comment expliquer que les vitesses des particules se répartissent suivant la statistique de Boltzmann<sup>27</sup> à l'équilibre?).

Dans l'équation d'état de Van der Waals<sup>28</sup>

$$\left(p + \frac{aN^2}{V^2}\right)(V - Nb) = NkT, \quad (125)$$

le cas limite où  $a = 0$  (interactions à longue distance nulles) et où  $Nb = 0$  (volume exclu nul) correspond au gaz parfait.

---

27. Ludwig Boltzmann (1844-1906)

28. Johannes Diderik van der Waals (1837-1923)

**2.b.** L'énergie cinétique d'un atome de gaz parfait se réduit à celle d'un point matériel :

$$E = \frac{1}{2}mv^2. \quad (126)$$

**3.a.** Le nombre total d'atomes contenus dans le volume  $V$  est

$$N = \int_V dV \int_0^\infty A \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) v^2 dv = AV \int_0^\infty \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v^2 dv = AV \frac{kT}{2m} \sqrt{\frac{2\pi kT}{m}}. \quad (127)$$

**3.b.** La vitesse quadratique moyenne  $u$  est donnée par

$$Nu^2 = AV \int_0^\infty \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v^4 dv = AV \frac{3k^2T^2}{2m^2} \sqrt{\frac{2\pi kT}{m}}. \quad (128)$$

On en tire

$$u = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \quad (129)$$

L'énergie cinétique moyenne d'un atome est

$$E_{\text{moy}} = \frac{1}{2}mu^2 = \frac{3}{2}kT, \quad (130)$$

soit  $\frac{1}{2}kT$  par degré de liberté.

**3.c.**

$$m = \frac{133 \cdot 10^{-3}}{R/k} = 2,21 \cdot 10^{-25} \text{ kg}; \quad u = \sqrt{\frac{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 373}{2,21 \cdot 10^{-25}}} = 264 \text{ m s}^{-1}.$$

4. L'énergie interne  $U$  est l'énergie microscopique des  $N$  atomes qui se réduit pour un gaz parfait à l'énergie cinétique. D'après l'équation (130),

$$U = N E_{\text{moy}} = \frac{3}{2} N k T. \quad (131)$$

L'énergie interne  $U$  d'un gaz parfait ne dépend que de  $T$ .

5. L'équation des gaz parfaits  $p = nkT$  et l'équation (130) donnent

$$p = \frac{1}{3} n m u^2. \quad (132)$$

Voici un modèle simplifié<sup>29</sup> qui redonne le résultat (132), sans utiliser la statistique de Boltzmann, par

---

29. Voir cours de théorie cinétique pour un modèle plus réaliste

l'étude mécanique des chocs des atomes sur une paroi.

Le gaz occupe une boîte cubique ( $|x| \leq a/2$ ,  $|y| \leq a/2$ ,  $|z| \leq a/2$ , en coordonnées cartésiennes par rapport à la base  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ ). On suppose que les atomes sont répartis en six classes de vitesses,  $\pm u\vec{i}$ ,  $\pm u\vec{j}$  et  $\pm u\vec{k}$  de  $N/6$  atomes chacune et que les atomes rebondissent de façon élastique sur les faces du cube. Cette distribution des vitesses reste alors inchangée au cours du temps. Calculons la force exercée sur la face de la boîte  $x = a/2$ . Cette face est un carré de surface  $S = a^2$  perpendiculaire à  $\vec{i}$  et est telle que seulement les atomes ayant la vitesse  $u\vec{i}$  se dirigent vers elle. Pendant le temps  $dt$ ,  $\frac{nu}{6}S dt$  atomes frappent cette face. Chaque atome lui cède la quantité de mouvement  $2mu\vec{i}$  en rebondissant avec la vitesse  $-u\vec{i}$ . La face reçoit donc la quantité de mouvement  $\frac{nu}{6}S dt 2mu\vec{i} = \vec{F} dt$  où  $\vec{F}$  est la force agissant sur la face. En écrivant  $\vec{F} = pS\vec{i}$  on retrouve (132).

# 1990 (incomplet)

## A. Choc de deux solides



L'énoncé de cette partie se trouve page 50.

1. Un choc entre deux solides est une interaction de durée limitée; avant et après le choc, les solides n'interagissent pas. Dans tout choc, il y a conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique du système formé par les deux solides. Dans un choc élastique, l'énergie cinétique totale des

deux solides est également conservée (chaque solide se retrouve après le choc avec la même énergie interne qu'avant le choc).

- 2.1.** Dans un référentiel galiléen<sup>30</sup>, tout objet reste immobile ou en mouvement uniforme tant qu'aucune force n'agit sur lui. Deux référentiels galiléens sont en translation uniforme l'un par rapport à l'autre.
- 2.2.** Si le référentiel  $R$  est galiléen,  $R_1$  le sera aussi si et seulement si le vecteur vitesse  $\vec{v}_e$  de translation de  $R_1$  par rapport à  $R$  est constant.

- 2.3.** On a (loi de composition des vitesses)

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_1} \quad (133)$$

où  $\vec{v}$  ( $\vec{v}_1$ ) est la vitesse du point dans  $R$  ( $R_1$ ).

- 2.4.** Notons  $\vec{v}_i$  et  $\vec{v}'_i$  (respectivement  $\vec{v}_{1i}$  et  $\vec{v}'_{1i}$ ) les vitesses du solide  $i$  ( $i = A, B$ ) à deux instants  $t$  (avant le choc) et  $t'$  (après le choc) dans  $R$  (respectivement  $R_1$ ). La conservation de l'énergie lors du choc s'écrit

---

30. Galileo Galilei, dit Galilée (1564-1642)

(aux instants  $t$  et  $t'$  l'énergie se réduit à l'énergie cinétique)

$$\sum_{i \in \{A, B\}} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 = \sum_{i \in \{A, B\}} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i'^2 \quad \text{dans } R, \quad (134)$$

$$\text{et} \quad \sum_{i \in \{A, B\}} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{1i}^2 = \sum_{i \in \{A, B\}} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{1i}'^2 \quad (135)$$

$$\text{ou} \quad \sum_{i \in \{A, B\}} \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_e)^2 = \sum_{i \in \{A, B\}} \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i' - \vec{v}_e)^2 \quad \text{dans } R_1. \quad (136)$$

La différence des équations (134) et (136), donne

$$\vec{v}_e \cdot \left( \sum_{i \in \{A, B\}} m_i \vec{v}_i \right) = \vec{v}_e \cdot \left( \sum_{i \in \{A, B\}} m_i \vec{v}_i' \right). \quad (137)$$

Comme on peut choisir le référentiel  $R_1$  avec  $\vec{v}_e$  arbitraire, on en déduit

$$\boxed{\sum_{i \in \{A, B\}} m_i \vec{v}_i = \sum_{i \in \{A, B\}} m_i \vec{v}_i'} \quad (138)$$

qui exprime la conservation de la quantité de mouvement totale du système avant et après le choc.

**3.1.** Ecrivons la conservation de la quantité de mouvement totale et de l'énergie cinétique totale :

$$\begin{aligned} m_A v'_A + m_B v'_B &= m_A v_0 \\ \frac{1}{2} m_A v'^2_A + \frac{1}{2} m_B v'^2_B &= \frac{1}{2} m_A v_0^2 \end{aligned}$$

ou en simplifiant ( $\alpha = m_B/m_A$ )

$$v'_A + \alpha v'_B = v_0 \quad (139)$$

$$v'^2_A + \alpha v'^2_B = v_0^2. \quad (140)$$

Eliminons  $v'_A$  entre les équations (139) et (140)

$$(v_0 - \alpha v'_B)^2 + \alpha v'^2_B = v_0^2 \quad \Rightarrow \quad -2\alpha v_0 v'_B + (\alpha^2 + \alpha)v'^2_B = 0.$$

Il y a deux solutions de cette équation en  $v'_B$ . La solution  $v'_B = 0$  à laquelle correspond  $v'_A = v_0$  reproduit les valeurs des vitesses avant le choc ; elle n'est pas acceptable après le choc où elle décrirait une situation où le solide  $A$  se trouve à droite du solide  $B$ . L'autre solution donne les vitesses après le choc

$$\boxed{v'_A = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} v_0} \quad \text{et} \quad \boxed{v'_B = \frac{2}{1 + \alpha} v_0} \quad (141)$$

telles que  $A$  reste toujours à gauche de  $B$  (car  $v'_A < v'_B$ ).

**3.2.** Pour  $m_A = m_B$  ( $\alpha = 1$ ),  $v'_A = 0$  et  $v'_B = v_0$ . Le solide  $A$  se retrouve au repos et le solide  $B$  prend la vitesse de  $A$  avant le choc.

4. Ecrivons la conservation de la quantité de mouvement totale et de l'énergie cinétique totale :

$$\vec{v}'_A + \vec{v}'_B = \vec{v}_0 \quad (142)$$

$$\vec{v}'_A{}^2 + \vec{v}'_B{}^2 = v_0^2. \quad (143)$$

En prenant le carré de l'équation (142), puis en utilisant l'équation (143), on a

$$v_0^2 = (\vec{v}'_A + \vec{v}'_B)^2 = \underbrace{\vec{v}'_A{}^2 + \vec{v}'_B{}^2}_{v_0^2} + 2\vec{v}'_A \cdot \vec{v}'_B = v_0^2 + 2\vec{v}'_A \cdot \vec{v}'_B$$

ce qui montre que  $\vec{v}'_A \cdot \vec{v}'_B = 0$ . Les vecteurs vitesses  $\vec{v}'_A$  et  $\vec{v}'_B$  sont donc orthogonaux après le choc (il est possible d'avoir  $v'_A = 0$  (cas du **3.2**) mais le cas  $v'_B = 0$  est exclu).

Les équations (142) et (143) donnent 3 relations pour 4 inconnues (les composantes des vitesses). On ne peut donc déterminer  $\vec{v}'_A$  et  $\vec{v}'_B$  qu'en fonction d'un paramètre arbitraire.

**5.1.** • Dans le référentiel  $R$  du laboratoire, la vitesse du centre de masse  $G$  de l'ensemble  $A$  et  $B$  est avant le

choc

$$v_G = \frac{m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B}{m_A + m_B} = \frac{m_A \vec{v}_0}{m_A + m_B} \quad \text{soit} \quad \boxed{v_G = \frac{\vec{v}_0}{1 + \alpha}}. \quad (144)$$

• La vitesse du centre de masse est constante (conservation de la quantité de mouvement totale du système). L'expression (144) s'applique aussi après le choc.

**5.2.a.** Le référentiel  $R^*$  est galiléen si la résultante des forces agissant sur le système est nulle, ce qui est le cas ici de l'ensemble  $A$  et  $B$ .

**5.2.b.** • Avant le choc, les vecteurs vitesses dans  $R^*$  sont  $\vec{v}_A^* = \vec{v}_0 - \vec{v}_G$  et  $\vec{v}_B^* = -\vec{v}_G$  soit

$$\boxed{\vec{v}_A^* = \frac{\alpha \vec{v}_0}{1 + \alpha}} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{v}_B^* = -\frac{\vec{v}_0}{1 + \alpha}}. \quad (145)$$

• Les quantités de mouvement sont

$$\boxed{\vec{p}_A^* = \frac{\alpha m_A \vec{v}_0}{1 + \alpha}} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{p}_B^* = -\frac{\alpha m_A \vec{v}_0}{1 + \alpha}}. \quad (146)$$

La quantité de mouvement totale  $\vec{p}_A^* + \vec{p}_B^*$  est nulle dans le référentiel du centre de masse.

- Les énergies cinétiques sont

$$\boxed{E_{cA}^* = \frac{\alpha^2}{(1+\alpha)^2} \frac{m_A v_0^2}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{E_{cB}^* = \frac{\alpha}{(1+\alpha)^2} \frac{m_A v_0^2}{2}}. \quad (147)$$

**5.3.a.** On a (la quantité de mouvement totale est nulle dans le référentiel du centre de masse):

$$\boxed{\vec{p}'_A + \vec{p}'_B = 0}. \quad (148)$$

**5.3.b.** L'énergie cinétique totale des deux solides  $E_c^* = \frac{\vec{p}'_A{}^2}{2m_A} + \frac{\vec{p}'_B{}^2}{2m_B} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_b} \right) \vec{p}'_A{}^2$  est conservée (choc élastique) et égale à  $E_c^* = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_b} \right) \vec{p}^{*2}$ . Il en résulte que  $\boxed{p'_A = p_A^*}$ . Le choc ne modifie pas le module des quantités de mouvement de chaque solide dans le référentiel du centre de masse. On a aussi

$$\boxed{v'_A = v_A^*} \quad \text{et} \quad \boxed{v'_B = v_B^*}.$$

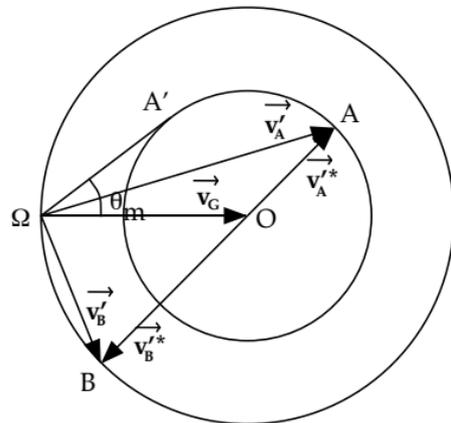
**5.3.c.** La vitesse  $\vec{v}'_A$  est représentée par le vecteur  $\overrightarrow{OA}$ , la vitesse  $\vec{v}'_B = -\vec{v}'_A/\alpha$  par le vecteur  $\overrightarrow{OB}$  et la vitesse  $\vec{v}_G$  par le vecteur  $\overrightarrow{\Omega O}$ . Les points  $B$  et  $\Omega$  se trouvent sur le cercle centré en  $O$  de rayon  $v'_B = v'_G = \frac{v'_A}{\alpha} > v'_A$  pour  $\alpha < 1$ .

La vitesse dans le référentiel du laboratoire  $\vec{v}'_A = \vec{v}_G + \vec{v}'_A$  est représentée par le vecteur  $\overrightarrow{\Omega O} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\Omega A}$  et la vitesse  $\vec{v}'_B = \vec{v}_G + \vec{v}'_B$  par le vecteur  $\overrightarrow{\Omega O} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{\Omega B}$ .

La déviation maximum correspond à  $\vec{v}'_A = \overrightarrow{\Omega A'}$  où  $\Omega A'$  est tangent au cercle des points  $A$ . On a donc  $\sin \theta_m = \frac{OA'}{O\Omega}$ , soit

$$\boxed{\sin \theta_m = \alpha.}$$

Application numérique:  $\theta_m = 30^\circ$ .



## 2 Ressort

1.1. L'énergie potentielle du ressort est

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 ; \quad (149)$$

cette énergie potentielle est égale à l'énergie cinétique  $E_c = \frac{1}{2}m_A v_0^2$  pour  $x = \pm x_m$ , où

$$x_m = \sqrt{\frac{m_A}{k}}v_0. \quad (150)$$

La longueur minimale du ressort au cours de l'interaction sera donc

$$l_{\min} = \begin{cases} l_0 - x_m & \text{si } x_m < l_0 \\ 0 & \text{si } x_m \geq l_0. \end{cases} \quad (151)$$

1.2.a. Les forces appliquées au solide  $A$  sont le poids, la réaction de la table (forces opposées) et la tension du ressort (quand le solide est en contact avec le ressort)  $\vec{T} = -kx\vec{u}_x$ .

**1.2.b.** Quand le solide touche le ressort (sinon le solide est en mouvement uniforme), l'équation différentielle du mouvement est

$$m_A \ddot{x} = -kx. \quad (152)$$

**1.2.c.** La solution de cette équation est

$$x = x_m \sin \omega t \quad \text{où} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_A}} \quad \text{et} \quad x_m = \sqrt{\frac{m_A}{k}} v_0 = \frac{v_0}{\omega} \quad (153)$$

en supposant que le solide  $A$  arrive sur le ressort au temps  $t = 0$  et que  $x_m < l_0$ . La vitesse du solide est alors

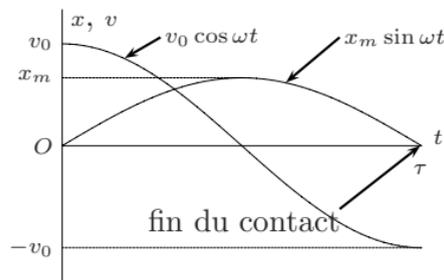
$$v = v_0 \cos \omega t. \quad (154)$$

**1.2.d.** Le contact solide–ressort cesse lorsque  $x$  reprend la valeur 0, c'est-à-dire au temps  $\pi/\omega$ . La durée de l'interaction est donc

$$\boxed{\tau = \pi \sqrt{\frac{m_A}{k}}}. \quad (155)$$

A la fin du contact, le solide repart avec la vitesse  $-v_0$ .

*Application numérique:*  $\omega = 5 \text{ s}^{-1}$ ;  $x_m = 5 \text{ cm}$  (on a bien  $x_m < l_0$ );  $\tau = 0,628 \text{ s}$ .



**2.1.** La quantité de mouvement totale du système  $A + B$  n'est pas nulle dans le référentiel du laboratoire. Un des deux solides au moins est en mouvement et possède une énergie cinétique non nulle.

**2.2.** Dans le référentiel du centre de masse  $R^*$ , la quantité de mouvement totale est nulle. Comme les solides  $A$  et  $B$  se rapprochent l'un de l'autre avant le choc et s'éloignent après, la vitesse d'un des solides change de signe. Quand ce solide a une vitesse nulle, il en est de même de l'autre. A ce moment-là, toute l'énergie est sous forme potentielle. D'après l'équation (147) l'énergie cinétique totale avant le choc est

$$E_c^* = E_{cA}^* + E_{cB}^* = \frac{\alpha^2}{(1+\alpha)^2} \frac{m_A v_0^2}{2} + \frac{\alpha}{(1+\alpha)^2} \frac{m_A v_0^2}{2} = \frac{\alpha}{1+\alpha} \frac{m_A v_0^2}{2} = \frac{1}{2} \mu v_0^2 \quad (156)$$

où  $\mu = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}$  est la masse réduite du système. Le raccourcissement maximum  $x'_m$  du ressort est donné par  $E_c^* = \frac{1}{2} k x_m'^2$  soit

$$\boxed{x'_m = \sqrt{\frac{\mu}{k}} v_0.} \quad (157)$$

La longueur minimale du ressort au cours de l'interaction est donc

$$l'_{\min} = \begin{cases} l_0 - x'_m & \text{si } x'_m < l_0 \\ 0 & \text{si } x'_m \geq l_0. \end{cases} \quad (158)$$

*Application numérique* :  $x'_m = 3,5$  cm (on a bien  $x'_m < l_0$ ) ;  $l'_{\min} = 11,5$  cm.

**2.3.a.** Dans le référentiel  $R$  du laboratoire, la vitesse du centre de masse  $G$  de l'ensemble  $A$  et  $B$  est donnée par l'équation (144)  $\boxed{v_G = \frac{\vec{v}_0}{1 + \alpha}}$ . Cette vitesse est constante (conservation de la quantité de mouvement totale du système, même au cours de l'interaction) et le référentiel  $R^*$  est galiléen comme précédemment.

**2.3.b.** Les forces appliquées au solide  $A$  sont le poids, la réaction de la table (forces opposées) et la tension du ressort (quand le solide est en contact avec le ressort)  $\vec{T}_A = -k(l_0 - x_B^* + x_A^*) \vec{u}_x$ . La force exercée par

le ressort sur  $B$  est son opposée  $\vec{T}_B = -\vec{T}_A$ . Les équations différentielles du mouvement de  $A$  et de  $B$  sont

$$m_A \ddot{x}_A^* + kx_A^* - kx_B^* = -kl_0 \quad (159)$$

$$m_B \ddot{x}_B^* - kx_A^* + kx_B^* = kl_0. \quad (160)$$

Comme  $G$  est le centre de gravité,  $\overline{AG} = \frac{m_B \overline{AB}}{m_A + m_B}$  et  $\overline{BG} = \frac{m_A \overline{BA}}{m_A + m_B}$ , soit

$$x_A^* = -\frac{\alpha x}{1 + \alpha}, \quad x_B^* = \frac{x}{1 + \alpha}. \quad (161)$$

En portant ces expressions dans l'équation (159) ou (160) on obtient :

$$\frac{m_A \alpha}{1 + \alpha} \ddot{x} + kx = kl_0, \quad \text{soit} \quad \mu \ddot{x} + k(x - l_0) = 0. \quad (162)$$

La solution générale de cette équation est

$$x = l_0 - X \sin(\omega' t + \phi) \quad \text{où} \quad \omega' = \sqrt{\frac{k}{\mu}}. \quad (163)$$

En supposant que le solide  $A$  entre en contact avec le ressort au temps  $t = 0$  et que  $x'_m < l_0$ , les conditions initiales  $x = l_0$  et  $\dot{x} = -v_0$  au temps  $t = 0$  donnent  $\phi = 0$  et  $X = \frac{v_0}{\omega'} = \sqrt{\frac{\mu}{k}} v_0 = x'_m$ , soit

$$x = l_0 - x'_m \sin \omega' t, \quad \dot{x} = -v_0 \cos \omega' t \quad (164)$$

On retrouve que la valeur minimum  $l'_{\min}$  de  $x$  est donnée par l'équation (158).

**2.3.c.** Le contact solide–ressort cesse lorsque  $x$  reprend la valeur  $l_0$ , c'est-à-dire au temps  $\pi/\omega'$ . La durée de l'interaction est donc

$$\tau' = \pi \sqrt{\frac{\mu}{k}}. \quad (165)$$

A la fin du contact, la vitesse relative des solides (équation (164)) est égale à  $v_0$ . Les vitesses, après l'interaction, des solides  $A$  et  $B$  dans le référentiel  $R^*$  sont (dériver les équations (161))

$$v_A^* = -\frac{\alpha v_0}{1 + \alpha} = -v_A^*, \quad v_B^* = \frac{v_0}{1 + \alpha} = -v_B^*. \quad (166)$$

Dans le référentiel  $R$ , elles sont

$$v_A' = v_G + v_A^* = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} v_0, \quad v_B' = v_G + v_B^* = \frac{2}{1 + \alpha} v_0 \quad (167)$$

qui sont identiques aux expressions (141) du choc étudié au **1.3.1**.

*Application numérique:*  $\mu = 0,3 \text{ kg}$ ;  $\omega' = 7,07 \text{ s}^{-1}$ ;  $\tau' = 0,444 \text{ s}$ ;  $v_G = v_A^* = -v_B^* = -v_A^* = v_B^* = 0,125 \text{ m s}^{-1}$ ;  $v_A' = 0$ ;  $v_B' = 0,25 \text{ m s}^{-1}$ .

### **3** Interaction de deux protons

**1.1.** Dans le cadre de la mécanique non relativiste, il y a conservation de l'énergie, de la quantité de mouvement et du moment cinétique.

**1.2.** Même réponses qu'en **2.2.1.** et **2.2.2.**

**1.3.** Le champ électrostatique  $\vec{E}$  et le potentiel  $V$  créés en  $\vec{r} = r \vec{u}_r$  par la charge ponctuelle  $q$  sont

$$\vec{E} = \frac{q\vec{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad \vec{V} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (168)$$

Les surfaces équipotentielles sont les sphères centrées sur la charge. Les lignes de champ sont les demi-droites issues de la charge.

**1.4.** La force exercée par le proton 1 sur le proton 2 est la force répulsive

$$\vec{F} = \frac{e^2\vec{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (169)$$

où  $\vec{u}_r$  est le vecteur unitaire dirigé de 1 vers 2. La force exercée par le proton 2 sur le proton 1 est son opposée. L'énergie potentielle d'interaction des protons est

$$E_p = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (170)$$

avec la convention  $E_p = 0$  quand les protons sont infiniment éloignés l'un de l'autre.

**1.5.** L'énergie cinétique initiale de l'ensemble des deux protons dans le référentiel du centre de masse est donnée par l'équation (156) avec  $\mu = m_p/2$ , soit

$$E_{c0}^* = \frac{1}{4}m_p v_0^2. \quad (171)$$

Quand les protons sont en interaction, la conservation de l'énergie s'écrit  $E_c^* + E_p = E_{c0}^*$  (on suppose que  $r_0$  est infiniment grand). Comme  $E_c^* \geq 0$ ,  $E_p \leq E_{c0}^*$ , soit  $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \leq \frac{1}{4}m_p v_0^2$  ce qui implique que la distance minimale  $r_{\min}$  entre les protons est

$$r_{\min} = \frac{4e^2}{4\pi\epsilon_0 m_p v_0^2}. \quad (172)$$

La vitesse instantanée de chacun des protons, lorsque ceux-ci sont à leur distance minimale, est nulle dans le référentiel du centre de masse (l'énergie cinétique est nulle). Elle vaut alors  $v_G = v_0/2$  dans le référentiel du laboratoire.

*Application numérique* :  $r_{\min} = 1,37 \cdot 10^{-13}$  m.

- 2.1.** Le choc n'est pas élastique : l'énergie relativiste  $E_p + E_c + \sum m_i c^2$  est conservée, mais comme le nombre de particules change, l'énergie cinétique  $E_c$  diffère avant et après le choc (l'énergie d'interaction  $E_p$  est alors nulle, mais l'énergie de repos totale  $\sum m_i c^2$  diffère).
- 2.2.** On peut exprimer la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement en disant qu'il y a conservation du 4-vecteur impulsion-énergie du système (noté  $\mathbf{P}$  ou  $\mathbf{P}^*$  ci-dessous). Pour des collisions à haute énergie (cadre de la mécanique quantique relativiste) la collision  $p + p$  peut produire de nouvelles particules. On a alors conservation de la charge, conservation du nombre de baryons ( $p, N, \Sigma, \Lambda, \dots$ ) moins le nombre d'antibaryons ( $\bar{p}, \bar{N}, \bar{\Sigma}, \bar{\Lambda}, \dots$ ) et conservation du nombre de leptons ( $e, \mu, \nu$ ) moins le nombre d'antileptons ( $\bar{e}, \bar{\mu}, \bar{\nu}$ ). Pour la collision  $p + p \longrightarrow p + p + p + \bar{p}$  ces lois de conservation sont bien vérifiées (charge :  $e + e \longrightarrow e + e + e - e$ , baryons :  $1 + 1 \longrightarrow 1 + 1 + 1 - 1$ , leptons :  $0 \longrightarrow 0$ )
- 2.3.** Si les quatre particules sont simultanément immobiles, la quantité de mouvement totale du système est nulle, ce qui n'est possible que dans le référentiel  $R^*$  du centre de masse. L'énergie totale est alors  $4m_p c^2$  ; l'énergie cinétique initiale dans  $R^*$  des deux protons est donc au moins  $2m_p c^2$ , soit  $m_p c^2$  pour chaque proton.

Soit  $\mathbf{p}_A \equiv (\vec{p}, E_A/c)$ ,  $\mathbf{p}_B \equiv (\vec{0}, m_p c)$  et  $\mathbf{P} = \mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B$  les 4-vecteurs impulsion-énergie dans le référentiel  $R$  du projectile incident, de la cible avant le choc et du système respectivement. Soit  $\mathbf{P}^*$  le 4-vecteur

impulsion-énergie dans le référentiel  $R^*$  du système. Dans le cas limite (produits immobiles dans  $R^*$ ),  $\mathbf{P}^* \equiv (\vec{0}, 4m_p c)$ . Les 4-produits scalaires étant des invariants relativistes,  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = (E_A/c + m_p c)^2 - \vec{p}^2$  est égal à  $\mathbf{P}^* \cdot \mathbf{P}^*$  soit, dans le cas limite,

$$(E_A/c + m_p c)^2 - \vec{p}^2 = (4m_p c)^2. \quad (173)$$

En tenant compte de

$$(E_A/c)^2 - \vec{p}^2 = (m_p c)^2, \quad (174)$$

on obtient en éliminant  $\vec{p}^2$

$$E_A = 7m_p c^2 \quad (175)$$

et l'énergie cinétique dans  $R$  du proton incident est

$$E_c = E_A - m_p c^2 = 6m_p c^2. \quad (176)$$

La relation

$$E_A = \frac{m_p c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}} \quad (177)$$

donne  $v_0 = \sqrt{\frac{48}{49}}c = 2,967 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$  pour la vitesse initiale minimale du projectile dans le référentiel du laboratoire.

- 2.4.** Deux protons ayant deux vitesses directement opposées dans le laboratoire doivent au moins avoir chacun l'énergie  $2m_p c^2$ . L'équation (177) donne alors  $v_0 = \sqrt{\frac{3}{4}}c = 2,596 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$  pour la vitesse minimale de chaque proton.

# 1991 (incomplet)

## 1. EMISSION ET PROPAGATION D'UNE ONDE SONORE



L'énoncé de cette partie se trouve page 74.

## 1. Etude simplifiée d'un haut-parleur électrodynamique

1.1. La force élémentaire  $\vec{df}$  qui s'exerce sur un petit élément  $i\vec{dl}$  de courant du solénoïde ( $i > 0$ ) est

$$\vec{df} = i\vec{dl} \wedge \vec{B} = -iB dl\vec{e}_x.$$

On en déduit que la résultante  $\vec{f}$  s'exerçant sur l'ensemble du solénoïde est

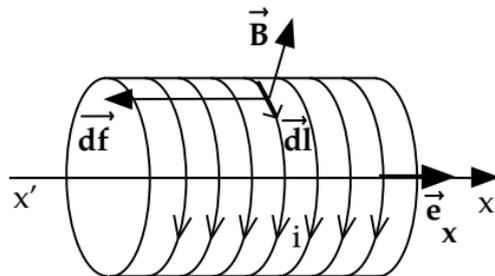
$$\vec{f} = -Bli\vec{e}_x$$

où  $l = 2\pi Na$  est la longueur du fil du bobinage.

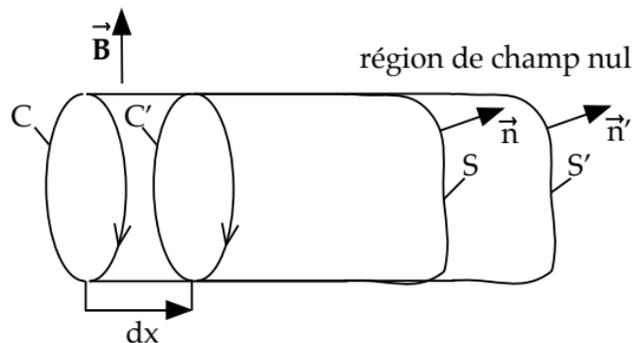
L'équation différentielle liant  $x(t)$  et ses dérivées à  $i(t)$  est donnée par le théorème du centre de masse :

$$m\ddot{x} = -kx - \mu\dot{x} - iBl, \quad (178)$$

où les termes du membre de droite sont dans l'ordre les forces de rappel, de frottement et magnétique mesurées selon l'axe  $Ox$ .



1.2. Soit  $C$  une boucle de rayon  $a$ , confondue avec une spire de la bobine et orientée dans le sens  $i > 0$ . Soit  $S$  une surface orientée, de bord  $C$ , formée d'un flanc de cylindre d'axe  $Ox$  et de rayon  $a$  dans la région de l'aimant et d'un couvercle situé loin vers la droite dans une région où le champ  $\vec{B}$  est nul. Lorsque  $S$  et  $C$  sont translatés parallèlement à  $Ox$  de  $dx$  dans le temps  $dt$  ( $S'$  et  $C'$  sont leurs nouvelles positions), le flux  $\Phi$  de  $\vec{B}$  à travers  $S$  varie de  $d\Phi = -2\pi a dx B$ .



Il apparaît alors dans  $C$  la force électromotrice induite

$$e_1 = -\frac{d\Phi}{dt} = 2\pi a B \frac{dx}{dt} = 2\pi a B v$$

qui fait circuler un courant dans le sens positif de  $i$  si  $e_1 > 0$ . Pour le bobinage, il apparaît à ses bornes la force électromotrice  $e = Ne_1$ , soit

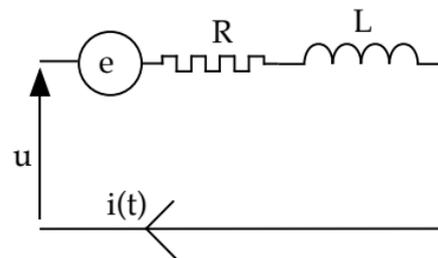
$$e = l B v.$$

Nota 1) L'équation  $e = l B v$  s'obtient aussi en utilisant le flux coupé. Chaque élément  $\vec{dl}$  de la bobine coupe par seconde le flux  $(\vec{dl} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{B} = v B dl$ .

*Nota 2)* Vérifions le signe de la relation  $e = lBv$  : si la bobine, parcourue par le courant  $i > 0$ , se déplace dans le sens de la force  $\vec{f}$  ( $v < 0$ ), la f.e.m.  $e$  induite par le déplacement est négative et tend à diminuer le courant  $i$ , conformément à la loi de Lenz<sup>31</sup>.

La circuit électrique de la bobine est schématisé ci-contre. La f.e.m.  $e = Blv$  s'ajoute à la tension  $u$  de la source. Lorsque le courant  $i$  varie, le phénomène d'auto-induction, schématisé par  $L$ , a lieu indépendamment du mouvement du bobinage. L'équation des mailles du circuit donne l'équation différentielle vérifiée par  $i(t)$  :

$$Ri + L \frac{di}{dt} - Blv = u \quad (179)$$



Les équations (178) et (179) forment un système d'équations différentielles couplées pour  $x$  et  $i$ .

### 1.3. On associe à $x(t)$ et ses dérivées les formes complexes

$$\underline{x}(t) = \frac{v}{j\omega}, \quad \underline{\dot{x}}(t) = \underline{v}, \quad \underline{\ddot{x}}(t) = j\omega \underline{v}. \quad (180)$$

---

31. Heinrich Friedrich Emil Lenz (1804-1865)

En portant les formes complexes dans l'équation (178) on a

$$mj\omega\underline{v} = -\frac{k}{j\omega}\underline{v} - \mu\underline{v} - Bl\underline{i}, \quad \text{soit} \quad \underline{I} = -\frac{1}{Bl} \left( \mu + j\omega m + \frac{k}{j\omega} \right) \underline{V} \quad (181)$$

et

$$\underline{V} = \frac{-Bl}{\mu + j \left( m\omega - \frac{k}{\omega} \right)} \underline{I}. \quad (182)$$

En portant les formes complexes dans l'équation (179) on a

$$\underline{U} = (R + j\omega L)\underline{I} - Bl\underline{V}, \quad (183)$$

et, en substituant l'expression (182) de  $\underline{V}$ ,

$$\underline{U} = \underline{Z}\underline{I} \quad \text{où} \quad \underline{Z} = R + j\omega L + \frac{B^2 l^2}{\mu + j \left( m\omega - \frac{k}{\omega} \right)}. \quad (184)$$

Pour  $B = 0$ , la membrane est immobile. On a donc

$$\underline{Z}_L = \underline{Z}|_{B=0} = R + j\omega L. \quad (185)$$

L'impédance  $\underline{Z}$  se met sous la forme  $\underline{Z} = \underline{Z}_L + \underline{Z}_m$  où

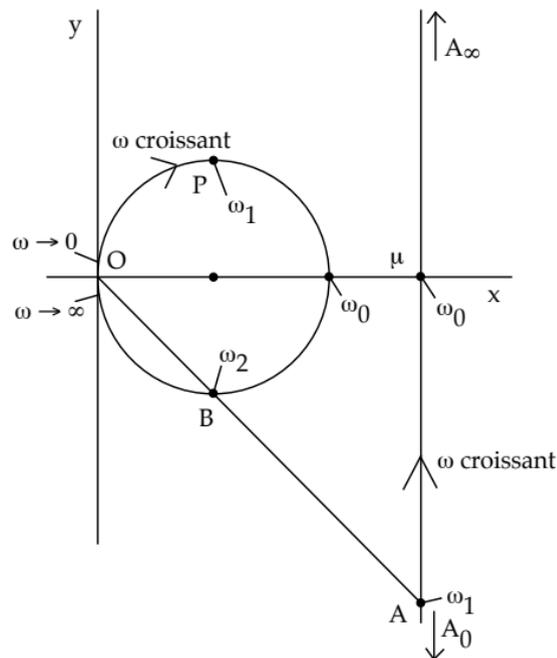
$$\underline{Z}_m = \frac{B^2 l^2}{\mu + j \left( m\omega - \frac{k}{\omega} \right)} = \underbrace{\frac{B^2 l^2 \mu}{\mu^2 + \left( m\omega - \frac{k}{\omega} \right)^2}}_{R_m(\omega)} + j \underbrace{\frac{B^2 l^2 \left( \frac{k}{\omega} - m\omega \right)}{\mu^2 + \left( m\omega - \frac{k}{\omega} \right)^2}}_{X_m(\omega)} \quad (186)$$

1.4. L'impédance  $\underline{Z}_m$  s'écrit

$$\underline{Z}_m = \frac{B^2 l^2}{\mu + jX} \quad \text{où} \quad X = m\omega - \frac{k}{\omega}. \quad (187)$$

$\omega$	0	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\infty$
$X$	$-\infty$	0	$\infty$
$\mu + jX$	$A_0$	$\mu$	$A_\infty$
$P(\omega)$	$O$	cercle	$O$

Lorsque  $\omega$  varie de 0 à  $\infty$ , le point  $A$  du plan complexe d'affixe  $\rho e^{j\theta} = \mu + jX$  décrit la droite  $A_0 A_\infty$  parallèle à  $Oy$  et à la distance  $\mu$  de  $O$ . Le point  $P$ , d'affixe  $Z_m = \frac{B^2 l^2}{\rho} e^{-j\theta}$  s'obtient à partir de  $A$  par une inversion de centre  $O$  et de puissance  $B^2 l^2$  suivie d'une symétrie par rapport à  $Ox$  (inversion-symétrie).



Sur la figure, on a représenté le point  $A$  correspondant à  $\omega = \omega_1$ , son inverse  $B$  et le point  $P$  symétrique

de  $B$  par rapport à  $Ox$ . Le lieu décrit par le point  $P$  quand  $\omega$  varie est l'image de la droite  $A_0A_\infty$  dans cette inversion-symétrie. C'est un cercle tangent à l'axe imaginaire à l'origine. L'image de  $\mu$  étant  $2R_0$ , on a la relation  $2R_0\mu = B^2l^2$  d'où on tire le rayon  $R_0$  du cercle

$$R_0 = \frac{B^2l^2}{2\mu}. \quad (188)$$

*Nota* On peut montrer ce résultat sans utiliser l'inversion de la façon suivante. Comme  $\rho = OA = \mu / \cos \theta$ ,

$$Z_m = \frac{B^2l^2}{\mu} \cos \theta e^{-j\theta} = \frac{B^2l^2}{2\mu} (e^{j\theta} + e^{-j\theta}) e^{-j\theta} = \frac{B^2l^2}{2\mu} + \frac{B^2l^2}{2\mu} e^{-2j\theta}. \quad (189)$$

Comme  $\theta$  varie de  $-\pi/2$  (pour  $\omega = 0$ ) à  $\pi/2$  (pour  $\omega \rightarrow \infty$ ) on retrouve les résultats ci-dessus.

Les pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$  correspondent à des points du cercle tels que  $\Re[Z_m] = R_0$ . Elles sont donc définies par  $Z_m(\omega_1) = R_0(1+j)$  et  $Z_m(\omega_2) = R_0(1-j)$ . Pour une pulsation  $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$  la résistance motionnelle  $\Re[Z_m(\omega)]$  est alors de valeur supérieure ou égale à  $R_0$ . Comme  $Z_m = \frac{2\mu R_0}{\mu + jX}$ , les valeurs de  $X$  pour  $\omega_1$

et  $\omega_2$ ,  $X_1 = m\omega_1 - \frac{k}{\omega_1}$  et  $X_2 = m\omega_2 - \frac{k}{\omega_2}$ , sont données par

$$1 + j = \frac{2}{1 + jX_1/\mu} \quad \text{et} \quad 1 - j = \frac{2}{1 + jX_2/\mu}, \quad \text{soit} \quad X_1 = -\mu \quad \text{et} \quad X_2 = \mu. \quad (190)$$

De l'équation  $X_1 = m\omega_1 - \frac{k}{\omega_1} = -\mu$ , qui s'écrit aussi  $m\omega_1^2 + \mu\omega_1 - k = 0$ , on garde la racine  $\omega_1 > 0$ , en

rejetant la racine  $\omega_1 < 0$ . On obtient de même la pulsation  $\omega_2$  (on peut aussi remarquer que  $\omega_2$  s'obtient à partir de  $\omega_1$  en changeant  $\mu$  en  $-\mu$ ). Les pulsations sont :

$$\omega_1 = \frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 + 4km}}{2m}, \quad \omega_2 = \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 + 4km}}{2m}. \quad (191)$$

D'où :

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{\mu}{m}. \quad (192)$$

## 2. Propagation du son dans l'air par onde plane



L'énoncé de cette partie se trouve page 78.

**2.1.**  $c$  est la vitesse du son. La forme générale de  $\xi(x, t)$  est

$$\xi(x, t) = F\left(t - \frac{x}{c}\right) + G\left(t + \frac{x}{c}\right) \quad (193)$$

où  $F(u)$  et  $G(u)$  sont des fonctions arbitraires (il n'est même pas nécessaire de supposer  $F$  et  $G$  deux fois dérivables si on considère l'équation d'onde au sens des distributions). C'est la superposition d'une

onde progressive se déplaçant vers les  $x$  positifs ( $F(t - x/c)$ ) et d'une onde progressive se déplaçant vers les  $x$  négatifs ( $G(t + x/c)$ ).  $G(t + x/c)$  est appelée parfois onde régressive.

**2.2.** L'onde est une onde progressive  $\xi(x, t) = F(t - x/c)$  telle que  $\xi(x = 0, t) = \xi_m \cos 2\pi ft$ . On a donc  $F(t) = \xi_m \cos 2\pi ft$  et

$$\xi(x, t) = \xi_m \cos 2\pi f \left( t - \frac{x}{c} \right) = \xi_m \cos 2\pi \left( ft - \frac{x}{\lambda} \right) \quad (194)$$

avec  $\lambda = c/f$ . En réalité, l'amplitude décroît avec la distance. A une distance  $r$  grande devant les dimensions du haut-parleur on a plutôt une onde sphérique :

$$\xi(r, t) = \frac{A}{r} \cos 2\pi f \left( t - \frac{r}{c} \right). \quad (195)$$

Pour mesurer la longueur d'onde  $\lambda$  de cette vibration, on envoie le signal du microphone placé en  $x$  sur l'oscilloscope. On mesure le déphasage  $\phi$  de ce signal par rapport à la tension d'alimentation du haut-parleur pour plusieurs positions du microphone. Comme

$$\phi = -2\pi \frac{x}{\lambda} + \phi_0 \quad (196)$$

la courbe de  $\phi$  en fonction de  $x$  est une droite de pente  $-2\pi/\lambda$ . Expérimentalement, il est commode de déterminer les points de la courbe où  $\phi = 0 \pmod{\pi}$ . La trace sur l'oscilloscope, utilisé en mode  $XY$ , est alors un segment de droite.

$$A.N. \quad c = \lambda f = 340 \text{ m s}^{-1}.$$

- 2.3.** 1) Effectuer l'expérience précédente pour diverses fréquences. On pourra alors affirmer « la vitesse de propagation du son dans l'air libre ne varie pas plus que  $\Delta c = \dots$  pour des fréquences de  $f_1 = \dots$  à  $f_2 = \dots$  ».
- 2) Produire un son bref. Ce son comprend une large bande de fréquences  $\Delta f \sim \frac{1}{\Delta t}$  où  $\Delta t$  est la durée du son. Si la vitesse du son est indépendante de la fréquence, le son reste perçu comme bref et de même durée à diverses distances.
- 3) Les auditeurs d'une salle de concert entendent les mêmes sons quelque que soit leur distance à l'orchestre. En réalité, ces sons diffèrent, non par suite d'une dépendance de la vitesse avec la fréquence, mais à cause de la réverbération de la salle.

### 3. Interférences avec des ondes ultrasonores.



L'énoncé de cette partie se trouve page 79.

- 3.1.** La vitesse de propagation des ultrasons est  $c = \lambda f = 340 \text{ m s}^{-1}$ . C'est la même que précédemment (la

vitesse du son est indépendante de la fréquence).

• L'expérience est l'analogie de l'expérience des trous d'Young<sup>32</sup>. Les ondes issues de  $S_1$  et  $S_2$  arrivant en  $M$  sont de la forme (195) où on peut négliger la variation de  $A/r$  le long de  $Oy$ :

$$\xi_1(M, t) = a \cos 2\pi \left( ft - \frac{S_1 M}{\lambda} \right), \quad \xi_2(M, t) = a \cos 2\pi \left( ft - \frac{S_2 M}{\lambda} \right) \quad (197)$$

Les distances  $S_1 M$  et  $S_2 M$  sont

$$S_1 M = \left( D^2 + \left[ y - \frac{a}{2} \right]^2 \right)^{1/2} \approx D + \frac{1}{2D} \left[ y - \frac{a}{2} \right]^2, \quad S_2 M = \left( D^2 + \left[ y + \frac{a}{2} \right]^2 \right)^{1/2} \approx D + \frac{1}{2D} \left[ y + \frac{a}{2} \right]^2. \quad (198)$$

On a donc

$$S_2 M - S_1 M \approx \frac{ay}{D}. \quad (199)$$

Les deux ondes en  $M$  sont déphasées de

$$\phi = 2\pi \frac{S_2 M - S_1 M}{\lambda} \approx 2\pi \frac{ay}{D\lambda}. \quad (200)$$

On peut observer un phénomène d'interférence en déplaçant le détecteur le long de  $Oy$ . Il y a un maximum

---

32. [Thomas Young \(1773-1829\)](#)

d'intensité quand les ondes sont en phases ( $\phi = 2\pi n$ ,  $n$  entier relatif), c'est à dire aux points  $y = ni$  où

$$i = \frac{D\lambda}{a} = 12,75 \text{ cm} \quad (201)$$

est l'interfrange.

- Les ondes (197) deviennent avec le déphaseur

$$\xi_1(M, t) = a \cos 2\pi \left( ft - \frac{S_1 M}{\lambda} \right), \quad \xi_2(M, t) = a \cos \left( 2\pi ft - 2\pi \frac{S_2 M}{\lambda} + \Phi \right). \quad (202)$$

Les deux ondes en  $M$  sont déphasées de

$$\phi = 2\pi \frac{S_2 M - S_1 M}{\lambda} - \Phi \approx 2\pi \frac{y}{i} - \Phi \quad (203)$$

et les interférences constructives s'observent en

$$y = \left( n + \frac{\Phi}{2\pi} \right) i \quad \text{où } n \text{ est entier relatif.} \quad (204)$$

Le système d'interférence est donc le système précédent décalé de  $\Phi i/2\pi$  parallèlement à  $Oy$ . Pour  $\Phi = -\pi/2$ , c'est une translation de  $i/4 = 3,2 \text{ cm}$  vers le bas.

## 3.2.

*Rappel.* Les règles d'un amplificateur opérationnel idéal sont :

1. (la sortie fait tout pour que)  $v_+ = v_-$  ;
2. les entrées (+ et -) ne prélèvent pas de courant.

Les équations des mailles sont :

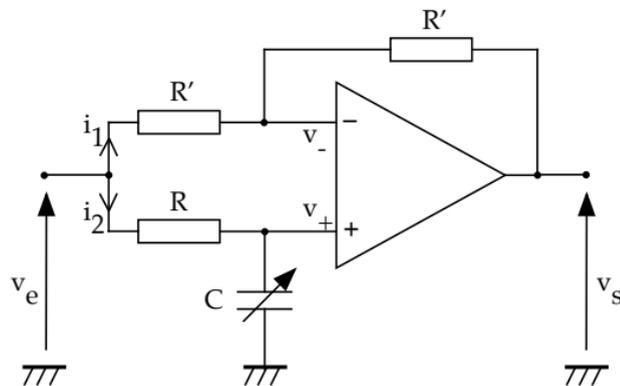
$$\underline{v}_s = \underline{v}_e - 2R'\underline{i}_1 \quad (205)$$

$$\underline{v}_e = \left( R - \frac{j}{C\omega} \right) \underline{i}_2 \quad (206)$$

$$R\underline{i}_2 = R'\underline{i}_1. \quad (207)$$

Déterminons la relation entre  $\underline{v}_s$  et  $\underline{v}_e$  en éliminant  $\underline{i}_1$  et  $\underline{i}_2$  dans ce système :

$$\underline{i}_2 = \frac{R'}{R}\underline{i}_1, \quad \underline{v}_e = R' \left( 1 - \frac{j}{RC\omega} \right) \underline{i}_1, \quad \underline{i}_1 = \frac{\underline{v}_e}{R' \left( 1 - \frac{j}{RC\omega} \right)}, \quad (208)$$



$$\underline{v}_s = \left( 1 - \frac{2}{1 - \frac{j}{RC\omega}} \right) \underline{v}_e = \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega} \underline{v}_e \quad (209)$$

La fonction de transfert harmonique est un nombre complexe de module 1 comme rapport  $z/\bar{z}$  de deux nombres complexes conjugués.  $\Phi$  s'obtient comme le double de l'argument de  $z$  :

$$H(j\omega) = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e} = \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega} = e^{j\Phi} \quad \text{où} \quad \Phi = -2\text{Arctg}(RC\omega) \quad \text{avec} \quad -\pi < \Phi < 0. \quad (210)$$

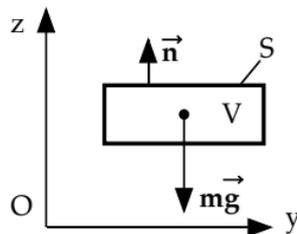
On a ainsi réalisé un circuit déphaseur dont le déphasage  $\Phi$  peut être ajusté par action sur la valeur de la capacité  $C$  du condensateur. La valeur de la capacité  $C$  pour que l'on ait  $\Phi = -\pi/2$  est telle que  $\tan \frac{\Phi}{2} = -\tan \frac{\pi}{4} = -1 = -RC\omega$ . On a donc  $C = \frac{1}{R\omega} = 3,98 \cdot 10^{-9} \text{ F} = 3,98 \text{ nF}$  (indépendant de  $R'$ ).

### 3. FORMATION D'UN COURANT ASCENDANT ET D'UN NUAGE



L'énoncé de cette partie se trouve page 84.

1. • Soit un volume  $V$  (pour la démonstration qui suit,  $V$  doit être quelconque et pas seulement une tranche d'épaisseur  $dz$  comme sur la figure demandée) de bord  $S$  orienté ( $\vec{n}$  désigne le vecteur unitaire sortant normal à l'élément de surface  $dS$ ). Les forces agissant sur le volume sont :



- le poids  $\rho\vec{g}d\tau$  pour chaque élément de volume  $d\tau$ , de résultante

$$m\vec{g} = \int_V \rho\vec{g}d\tau; \quad (211)$$

- les forces de pression  $-p\vec{n}dS$  pour chaque élément de surface  $dS$  ; la résultante des forces de pression s'écrit en utilisant le théorème de Green :

$$\vec{F}_p = \int_S -p\vec{n}dS = - \int_V \vec{\nabla}p d\tau; \quad (212)$$

A l'équilibre, la somme des forces est nulle :

$$m\vec{g} + \vec{F}_p = \int_V (\rho\vec{g} - \vec{\nabla}p) d\tau = 0. \quad (213)$$

Cette relation étant vraie pour tout  $V$ , on en déduit que

$$\vec{\nabla} p = \rho \vec{g} = -\rho g \vec{u}_z \quad \text{soit} \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \quad (214)$$

Il en résulte que  $p$  ne dépend pas de  $x$  et  $y$ , mais seulement de  $z$ , et que

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g. \quad (215)$$

*Nota.* A l'équilibre le moment des forces agissant sur le volume  $V$  doit aussi être nul. Calculons le moment des forces  $\vec{M}_0$  par rapport à  $O$  en notant  $\vec{r}$  le vecteur de  $O$  au point d'intégration.

$$\vec{M}_0 = \int_S \vec{r} \wedge (-p \vec{n} dS) + \int_V \vec{r} \wedge (\rho \vec{g}) d\tau = \int_V \vec{\nabla} \wedge (p \vec{r}) d\tau + \int_V \vec{r} \wedge (\rho \vec{g}) d\tau = \int_V \left[ \vec{\nabla} p \wedge \vec{r} + \vec{r} \wedge (\rho \vec{g}) \right] d\tau = 0 \quad (216)$$

où la dernière égalité résulte de l'équation (214). La condition d'équilibre  $\vec{M}_0 = 0$  est donc vérifiée.

• Ecrivons l'équation d'état des gaz parfaits pour une mole d'air à l'altitude  $z$  ( $pV = RT$  où  $V = M/\rho$  est le volume d'une mole). On obtient la relation demandée :

$$\rho = \frac{pM}{RT}. \quad (217)$$

- En éliminant  $\rho$  entre les équations (215) et (217) on a :

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT}dz = -\left(\frac{Mg}{R}\right)\frac{dz}{T_0 - \lambda z}. \quad (218)$$

D'où, par intégration de 0 à  $z$ ,

$$\log\left(\frac{p}{p_0}\right) = \left(\frac{Mg}{R\lambda}\right)\log\left(\frac{T_0 - \lambda z}{T_0}\right) = \left(\frac{Mg}{R\lambda}\right)\log\left(\frac{T}{T_0}\right). \quad (219)$$

Posant

$$q = \frac{R\lambda}{Mg}, \quad (220)$$

il en résulte que la pression  $p$  et la température  $T$  à l'altitude  $z$  sont liées par la loi de nivellement barométrique

$$T = T_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^q. \quad (221)$$

$R\lambda$  et  $Mg$  ont tous deux la dimension d'une énergie divisée par une longueur :  $q$  est sans dimension, comme il se doit pour un exposant.

*A.N.*  $q = 0,19$  ; on peut écrire la formule numérique :

$$p = p_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{1/q} = 1,01 \cdot 10^5 \left(\frac{T}{288}\right)^{5,27} = 1,12 \cdot 10^{-8} T^{5,27} \quad T \text{ en K, } p \text{ en Pa.} \quad (222)$$

2. • La bulle s'élève si  $\rho_B < \rho_A$  (la poussée d'Archimède  $\rho_A g V_B$  est plus grande que le poids  $\rho_B g V_B$ ). D'après l'équation d'état (217),

$$\rho_A = \frac{p_B M}{R T_A}, \quad \rho_B = \frac{p_B M}{R T_B} \quad \text{on a l'équivalence } \rho_B < \rho_A \Leftrightarrow T_B > T_A \quad (223)$$

et la bulle s'élève si sa température  $T_B$  est supérieure à celle  $T_A$  de l'air environnant.

- Dans la transformation adiabatique réversible, l'expression  $p^{1-\gamma} T^\gamma$  est constante. La pression  $p_B$  et la température  $T_B$  de la bulle au cours de son ascension sont donc reliées aux valeurs initiales  $p_1$  et  $T_1$  par

$$p_B^{1-\gamma} T_B^\gamma = p_1^{1-\gamma} T_1^\gamma. \quad (224)$$

On en déduit

$$T_B = T_1 \left( \frac{p_B}{p_1} \right)^{1-(1/\gamma)}. \quad (225)$$

- D'après l'équation (221) ( $T_A = T_0 (p_B/p_0)^q$ ) et l'équation (225), on a

$$\frac{T_B}{T_A} = \alpha \left( \frac{p_B}{p_0} \right)^r \quad \text{où} \quad \alpha = \frac{T_1}{T_0} \left( \frac{p_0}{p_1} \right)^{1-(1/\gamma)} \quad \text{et} \quad r = 1 - \frac{1}{\gamma} - q. \quad (226)$$

Lorsque la bulle s'élève, la pression diminue et tend vers 0. Comme  $\alpha$  est une constante et  $r \approx 0,0958 > 0$ , le rapport  $T_B/T_A$  diminue également. Il tendrait aussi vers 0 si ce n'est que lorsque  $T_B/T_A = 1$  la bulle

cesse de monter. Il existe donc une altitude plafond  $z_2$  pour l'ascension de la bulle. Les variables d'état à l'altitude  $z_2$  sont alors données par

$$p_2 = p_0 \alpha^{-1/r} \text{ d'après Eq (226), } T_2 = T_0 \left( \frac{p_2}{p_0} \right)^q \text{ d'après Eq (221) et } z_2 = \frac{T_0 - T_2}{\lambda}. \quad (227)$$

- Calculs numériques. Notant  $T'_1$  la température ambiante à l'altitude  $z_1$ , on calcule

$$\frac{T'_1}{T_0} = 1 - \frac{\lambda z_1}{T_0} = 0,9549 \quad (T'_1 = 275 \text{ K}), \quad \frac{p_1}{p_0} = \left( \frac{T'_1}{T_0} \right)^{1/q} = 0,784 \quad (p_1 = 79200 \text{ Pa}),$$

$$\alpha = 1,0422,$$

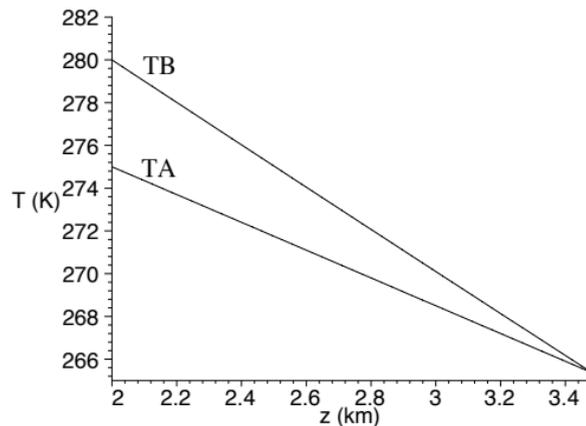
$$\frac{p_2}{p_0} = \alpha^{-1/r} = 0,649 \quad (p_2 = 65600 \text{ Pa}),$$

$$\frac{T_2}{T_0} = \left(\frac{p_2}{p_0}\right)^q = 0,921 \quad (T_2 = 265 \text{ K}),$$

et enfin l'altitude plafond

$$z_2 = \frac{T_0 - T_2}{\lambda} = 3480 \text{ m.} \quad (228)$$

La figure ci-contre représente les températures  $T_B$  et  $T_A$  au cours de l'ascension de la bulle de  $z_1$  à  $z_2$ .



3. La pression partielle  $p_v$  de la vapeur d'eau suit une loi analogue à la loi de nivellement barométrique, avec un autre exposant  $q'$ , si on traite cette vapeur comme un gaz parfait. Cette pression partielle décroît donc au cours de l'ascension de la bulle quand la température  $T$  décroît. La pression de vapeur saturante  $p_s$  décroît également (voir table).

$T$ (K)	$p_s$ (Pa)
253	103 (glace)
263	260 (glace)
273	611
283	1228
293	2338

L'altitude de formation d'un nuage est l'altitude pour laquelle les deux pressions  $p_v$  et  $p_s$  deviennent égales (cela peut ne pas avoir lieu).

# 1992 (incomplet)

## DEUXIEME PARTIE. MECANIQUE

### I. Mouvement d'un point matériel dans un champ newtonien



L'énoncé de cette partie se trouve page 92.

1. Le champ gravitationnel terrestre en un point  $M$  situé à la distance  $r > R_T$  du centre de la Terre est

$$\vec{\mathcal{G}} = -\frac{GM_T \vec{u}_r}{r^2} \quad \text{où} \quad \vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{r}. \quad (229)$$

2.a. Pour un mouvement circulaire ( $r = \text{constante}$ ), le vecteur position  $\vec{r}$ , la vitesse  $\vec{v}$  et l'accélération  $\vec{\gamma}$  sont

$$\vec{r} = r \vec{u}_r, \quad \vec{v} = v \vec{u}_\theta, \quad \vec{\gamma} = -\frac{v^2}{r} \vec{u}_r + \dot{v} \vec{u}_\theta. \quad (230)$$

Or  $\vec{\gamma} = \vec{\mathcal{G}}$ . On a donc  $\dot{v} = 0$  et le mouvement circulaire est nécessairement uniforme.

2.b. Le vecteur vitesse doit être perpendiculaire à  $\overrightarrow{OM}$  et de module tel que  $\vec{\gamma} = \vec{\mathcal{G}}$ , soit  $\frac{v^2}{r} = \frac{GM_T}{r^2}$  :

$$\vec{v} = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} \vec{u}_\theta. \quad (231)$$

2.c. La période  $T$  du satellite est

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM_T}}. \quad (232)$$

**2.d.** L'énergie  $E$  du satellite est la somme de l'énergie potentielle  $E_p = -\frac{GmM_T}{r}$  et de l'énergie cinétique  $E_c = \frac{1}{2}mv^2$

$$E = -\frac{GmM_T}{r} + \frac{1}{2}m\frac{GM_T}{r} = -\frac{GmM_T}{2r}. \quad (233)$$

**2.e.** Le satellite au sol à la latitude  $\lambda$  a la vitesse  $v_0 = \frac{2\pi R_T \cos \lambda}{T_0}$  dans le référentiel géocentrique. Son énergie au sol est

$$E_0 = -\frac{GmM_T}{R_T} + \frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi R_T \cos \lambda}{T_0}\right)^2. \quad (234)$$

Pour le placer, depuis le sol, sur son orbite circulaire il faut lui communiquer l'énergie

$$\Delta E = E - E_0 = \frac{GmM_T}{R_T} - \frac{GmM_T}{2r} - \frac{2\pi^2 m R_T^2 \cos^2 \lambda}{T_0^2}. \quad (235)$$

L'intérêt d'une base équatoriale ( $\lambda = 0$ ,  $\cos \lambda = 1$ ) est que  $\Delta E$  est alors minimum.

**2.f.** *Application numérique :* Pour  $r = 6\,600$  km, la vitesse du satellite sur son orbite circulaire est  $v = 7\,787$  m s<sup>-1</sup> et la période de son mouvement est  $T = 5\,325$  s = 1 h 28 mn 45 s.

**2.g.** • Satellite géostationnaire: satellite qui reste à la verticale d'un point donné de la surface terrestre. La trajectoire du satellite restant dans un plan fixe contenant le centre de la Terre  $O$ , cela n'est possible que si ce plan est le plan équatorial et si le satellite a la vitesse angulaire constante  $\frac{2\pi}{T_0}$  et donc une orbite circulaire.

• Il n'est pas possible de placer un satellite géostationnaire à la verticale de Paris comme à la verticale de toute ville non située sur l'équateur.

• Désignons par  $r_g$  le rayon de l'orbite géostationnaire et par  $v_g$  la vitesse du satellite sur son orbite. La période du satellite géostationnaire est  $T_0 = \frac{2\pi r_g}{v_g} = 2\pi \sqrt{\frac{r_g^3}{GM_T}}$  d'après l'équation (232). Donc

$$r_g = \left( \frac{GM_T T_0^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} = 42220 \text{ km.} \quad (236)$$

• La vitesse du satellite sur son orbite est

$$v_g = \frac{2\pi r_g}{T_0} = \left( \frac{2\pi GM_T}{T_0} \right)^{\frac{1}{3}} = 3,079 \text{ km s}^{-1}. \quad (237)$$

**3.a.** Le demi-grand axe de l'orbite de transfert est

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2}. \quad (238)$$

**3.b.** Les énergies du satellite sur les orbites  $(\mathcal{O}_1)$ ,  $(\mathcal{O}_2)$ ,  $(\mathcal{E})$  sont, d'après l'équation (233) (où on remplace  $r$  par  $a$  pour l'orbite  $\mathcal{E}$ ),

$$E_1 = -\frac{GmM_T}{2r_1}, \quad E_2 = -\frac{GmM_T}{2r_2} \quad \text{et} \quad E_t = -\frac{GmM_T}{r_1 + r_2} \quad \text{respectivement.} \quad (239)$$

**3.c.** Les variations d'énergies sont

$$\Delta E_1 = E_t - E_1 = GmM_T \left( \frac{1}{2r_1} - \frac{1}{r_1 + r_2} \right), \quad \Delta E_2 = E_2 - E_t = GmM_T \left( \frac{1}{r_1 + r_2} - \frac{1}{2r_2} \right) \quad (240)$$

*Application numérique.*  $\Delta E_1 = 2,212 \cdot 10^9$  J et  $\Delta E_2 = 0,346 \cdot 10^9$  J.

**3.d.** La durée  $\tau$  du transfert est une demi-période de l'orbite  $\mathcal{E}$ , soit, d'après l'équation (232) où on remplace  $r$  par  $a$ ,

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{(r_1 + r_2)^3}{8GM_T}} = 1,893 \cdot 10^4 \text{ s} = 5 \text{ h } 15 \text{ mn.} \quad (241)$$

## II. Etude énergétique du mouvement d'un point matériel dans un champ newtonien

↑ L'énoncé de cette partie se trouve page 97.

1. Le moment cinétique en  $O$  du point matériel

$$\vec{\sigma} = \vec{r} \wedge m\vec{v} \quad (242)$$

vérifie

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \vec{v} \wedge m\vec{v} + \vec{r} \wedge \vec{f} = 0 \quad (243)$$

pour la force centrale  $\vec{f} = -\frac{k}{r^2}\vec{u}$ . On en déduit que  $\vec{\sigma}$  est une constante du mouvement.

Si  $\vec{\sigma} \neq 0$ , le mouvement a lieu dans le plan perpendiculaire à  $\vec{\sigma}$  passant par  $O$ .

Si  $\vec{\sigma} = 0$ ,  $\vec{r}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{f}$  sont parallèles. le mouvement a lieu sur une demi-droite.

2. On a

$$\vec{f} = -\vec{\nabla}E_p = -\frac{dE_p}{dr}\vec{u} \quad \text{où} \quad E_p = -\frac{k}{r}. \quad (244)$$

Cela montre que la force  $\vec{f}$  dérive de l'énergie potentielle  $E_p$  qui est complètement définie par la convention  $E_p$  nulle pour  $r \rightarrow \infty$ .

3. L'énergie mécanique  $E_m = E_c + E_p(r)$  est définie comme la somme de l'énergie cinétique  $E_c = \frac{1}{2}m\vec{v}^2$  et de l'énergie potentielle  $E_p(r)$ . La conservation de  $E_m$  résulte de l'équation de Newton  $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f}$ :

$$\frac{dE_m}{dt} = m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{\nabla}E_p \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \left( m\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{f} \right) \cdot \vec{v} = 0. \quad (245)$$

- 4.a. Dans la base cylindrique  $(\vec{u}, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$

$$\vec{r} = r\vec{u}, \quad \vec{v} = \dot{r}\vec{u} + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta, \quad \vec{\sigma} = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z = mC\vec{u}_z. \quad (246)$$

Dans le nom *constante des aires* de l'expression  $C = r^2\dot{\theta}$ , le terme *constante* résulte de la conservation du moment cinétique  $\vec{\sigma}$ . L'expression *des aires* résulte du fait que  $C = 2\frac{dA}{dt}$  où  $A$  est l'aire balayée par le rayon vecteur  $\vec{r}$  depuis un instant origine ( $C$  est le double de la vitesse aréolaire).

4.b. L'énergie mécanique est

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{k}{r_0}. \quad (247)$$

Comme  $\vec{v}_0 = v_0 \cos \alpha_0 \vec{u} + v_0 \sin \alpha_0 \vec{u}_\theta$ ,

$$\vec{\sigma} = r_0 \vec{u} \wedge m(v_0 \cos \alpha_0 \vec{u} + v_0 \sin \alpha_0 \vec{u}_\theta) = mr_0 v_0 \sin \alpha_0 \vec{u}_z = mC \vec{u}_z \quad \Rightarrow \quad C = r_0 v_0 \sin \alpha_0. \quad (248)$$

4.c. L'énergie mécanique de la particule s'écrit, en utilisant  $\dot{\theta} = C/r^2$ ,

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{r} = \frac{1}{2}m \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - \frac{k}{r} = \frac{1}{2}m \left( \dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2} \right) - \frac{k}{r} = \frac{1}{2}m \dot{r}^2 - \underbrace{\frac{k}{r} + \frac{mC^2}{2r^2}}_{E'(r)}. \quad (249)$$

4.d. La fonction  $E'(r) = -\frac{k}{r} + \frac{mC^2}{2r^2}$  a pour dérivée

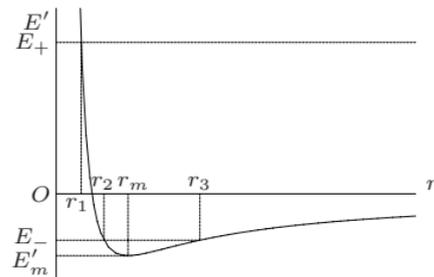
$$\frac{dE'}{dr} = \frac{k}{r^2} - \frac{mC^2}{r^3} \quad (250)$$

qui s'annule pour  $r = r_m$  où

$$r_m = \frac{mC^2}{k} = \frac{mr_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{k}. \quad (251)$$

On en déduit le tableau des variations

$r$	0	$r_m$	$\infty$
$\frac{dE'}{dr}$		- 0 +	
$E'$	$+\infty$	$E'_m$	0



La fonction  $E'(r)$  admet donc un minimum  $E'_m$  pour  $r = r_m$  où

$$E'_m = -\frac{k}{r_m} + \frac{mC^2}{2r_m^2} = -\frac{k^2}{2mC^2} = -\frac{k^2}{2mr_0^2v_0^2 \sin^2 \alpha_0}. \quad (252)$$

**4.e.** Comme  $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E'(r)$  doit être plus grand ou égal à  $E'(r)$  :

- si  $E'_m \leq E < 0$ , l'équation  $E'(r) = E$  (pour  $r > 0$ ) a deux racines  $r_2$  et  $r_3$  et  $r$  varie de  $r_2$  à  $r_3$  : le point matériel reste prisonnier du centre des forces. *Nota* : la trajectoire est une ellipse.
- si  $E \geq 0$ , l'équation  $E'(r) = E$  (pour  $r > 0$ ) a une seule racine  $r_1$  et  $r$  varie de  $r = r_1$  à l'infini : le point matériel échappe au centre des forces. *Nota* : la trajectoire est une hyperbole ( $E > 0$ ) ou une parabole ( $E = 0$ ).

La condition demandée est donc  $E < 0$ .

**4.f.** Pour que le point matériel échappe au centre des forces il faut (voir l'équation (247))

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{k}{r_0} \geq 0 \quad \text{soit} \quad v_0 \geq v_{0m} \quad \text{où} \quad v_{0m} = \sqrt{\frac{2k}{mr_0}} \quad (253)$$

est la *vitesse de libération*.

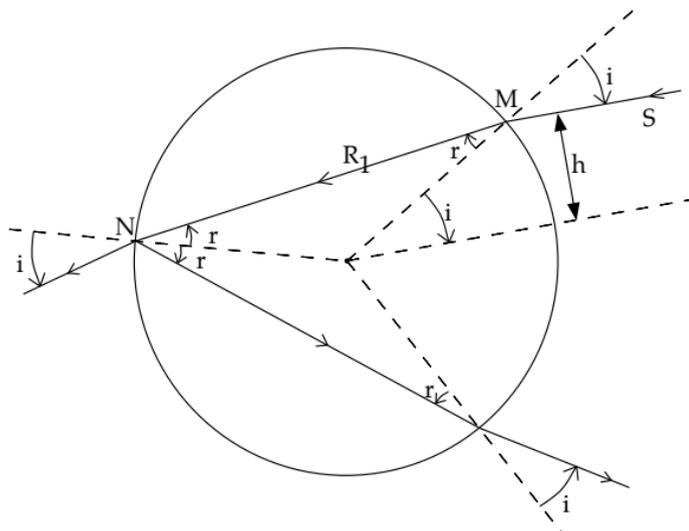
**4.g.** Lorsque  $E = E'_m$ ,  $r_2 = r_3 = r_m \Rightarrow r = r_m$ ;  $C = \text{Cte} \Rightarrow v = \text{Cte}$ . Le mouvement est circulaire uniforme.

# 1993 (incomplet)

## Première partie. L'Arc-en-Ciel



L'énoncé correspondant à cette figure se trouve page 108.



## Diffraction d'une particule alpha par un noyau d'or



L'énoncé de cette partie se trouve page 115.

1. On appelle particule  $\alpha$  le noyau d'hélium  ${}^4_2\text{He}$  formé de deux protons et deux neutrons.
2. Le rapport de la force gravitationnelle et de la force coulombienne<sup>33</sup> exercées par le noyau sur la particule  $\alpha$  est, en notant  $m_p \approx \frac{1}{1836} m$  la masse d'un proton,

$$\frac{F_g}{F_c} = \frac{GmM}{Qq/4\pi\epsilon_0} \approx \frac{4 \cdot 197}{2 \cdot 79} \frac{4\pi\epsilon_0 Gm_p^2}{e^2} = 4 \cdot 10^{-34} \ll 1. \quad (254)$$

3. Comme  $\frac{m}{M} = \frac{4}{197} \ll 1$ , le centre de masse  $C$  du système  $\alpha$  et noyau d'or est très proche de  $O$ . Le centre de masse a une vitesse constante, et dans l'approximation qui identifie  $O$  et  $C$ , cette vitesse est nulle : la cible est considérée comme immobile. Dans une expérience réelle, le noyau d'or fait partie d'un solide (feuille d'or) ce qui limite encore plus le recul du noyau.
4. Le moment cinétique en  $O$  de la particule  $\alpha$

$$\vec{\sigma} = \vec{r} \wedge m\vec{v} \quad (255)$$

---

33. Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806)

vérifie

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \vec{v} \wedge m\vec{v} + \vec{r} \wedge \vec{F} = 0 \quad (256)$$

pour la force centrale (coulombienne)  $\vec{F}$ . On en déduit que  $\vec{\sigma}$  est une constante du mouvement.

Si  $\vec{\sigma} \neq 0$ , le mouvement a lieu dans le plan perpendiculaire à  $\vec{\sigma}$  passant par  $O$ . Ce plan est le plan qui contient les points  $O$  et  $M_0$  (la position initiale de  $M$ ) et parallèle à  $\vec{v}_0$  (la vitesse initiale).

Si  $\vec{\sigma} = 0$ ,  $\vec{r}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{F}$  sont parallèles. le mouvement a lieu sur la demi-droite  $OM_0$ .

## 5. En coordonnées polaires

$$\vec{r} = r\vec{e}_r, \quad \vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta, \quad \vec{\sigma} = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z \quad (\vec{e}_z = \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta \text{ est perpendiculaire au plan}). \quad (257)$$

La relation

$$r^2\dot{\theta} = C \quad \text{où} \quad C = \frac{\sigma}{m} = \text{constante} \quad (258)$$

résulte de la conservation du moment cinétique  $\vec{\sigma}$ .

6. L'énergie mécanique  $E_m = E_c + E_p(r)$  est définie comme la somme de l'énergie cinétique  $E_c = \frac{1}{2}m\vec{v}^2$  et de l'énergie potentielle  $E_p(r)$ , qui est une fonction de  $r$  telle que la force agissant sur la particule  $\alpha$  soit

donnée par  $\vec{F} = -\vec{\nabla}E_p = \frac{dE_p}{dr}\vec{e}_r$  (cas d'une force centrale). La conservation de  $E_m$  résulte de

$$\dot{E}_m = m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{\nabla}E_p \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \left( m\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{F} \right) \cdot \vec{v} = 0. \quad (259)$$

7. Comme  $\vec{v}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \dot{r}^2 + \frac{\sigma^2}{m^2r^2}$ , l'énergie mécanique  $E_m$  s'écrit

$$E_m = \frac{1}{2}m \left( \dot{r}^2 + \frac{\sigma^2}{m^2r^2} \right) + E_p. \quad (260)$$

8. La formule de Binet<sup>34</sup> est une formule cinématique qui donne l'accélération (qui est purement radiale)  $\gamma = F/m$  en termes de la trajectoire (caractérisée par la fonction  $u(\theta)$ ) et de la vitesse aréolaire  $\sigma/2m$ . La formule peut s'obtenir en partant de l'expression de  $\gamma$  en coordonnées polaires, mais ici on nous demande de partir de  $\vec{F} = -\vec{\nabla}E_p$ . Ecrivons donc ( $E_p + E_c = E_m = \text{constante}$ )

$$\vec{F} = -\frac{dE_p}{dr}\vec{e}_r = \left( -\frac{dE_m}{dr} + \frac{dE_c}{dr} \right) \vec{e}_r = \frac{dE_c}{dr}\vec{e}_r = \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{2}mv^2 \right) \vec{e}_r. \quad (261)$$

---

34. Jacques Philippe Marie Binet (1786-1856)

Exprimons  $dr$  et  $dt$  en termes de  $du$  et  $d\theta$  :

$$dr = -\frac{du}{u^2}, \quad dt = \frac{mr^2}{\sigma} d\theta = \frac{m}{\sigma u^2} d\theta. \quad (262)$$

D'où

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = -\frac{\sigma}{m} \frac{du}{d\theta} = -\frac{\sigma}{m} u', \quad v^2 = \dot{r}^2 + \frac{\sigma^2}{m^2 r^2} = \frac{\sigma^2}{m^2} (u'^2 + u^2), \quad (263)$$

$$\frac{d}{dr} v^2 = -u^2 \frac{d}{du} v^2 = -\frac{u^2}{u'} \frac{d}{d\theta} v^2 = -\frac{u^2}{u'} \frac{\sigma^2}{m^2} (2u'u'' + 2uu') = -\frac{2\sigma^2}{m^2} u^2 (u'' + u). \quad (264)$$

On arrive à la formule de Binet :

$$F = \frac{1}{2} m \frac{d}{dr} v^2 = -\frac{\sigma^2}{m} u^2 (u'' + u). \quad (265)$$

9. La force coulombienne est (répulsion)

$$F = \frac{Qqu^2}{4\pi\epsilon_0}. \quad (266)$$

La formule de Binet s'écrit

$$u'' + u = -\frac{mQq}{\sigma^2 4\pi\epsilon_0} \quad \text{soit} \quad u'' + u = \frac{1}{p} \quad \text{où} \quad p = -\frac{\sigma^2 4\pi\epsilon_0}{mQq}. \quad (267)$$

La solution générale s'écrit :

$$u = \frac{1}{p} + A \cos(\theta - \beta) \quad \text{soit} \quad r(\theta) = \frac{p}{1 + pA \cos(\theta - \beta)}. \quad (268)$$

C'est l'équation d'une conique d'excentricité  $e = |Ap|$ . Dans la diffusion d'une particule,  $r \rightarrow \infty$  pour  $t \rightarrow \pm\infty$ , la conique est une hyperbole  $e > 1$ .

Les constantes  $p$ ,  $A$ ,  $\beta$  peuvent s'expliciter en fonction des conditions initiales. Supposons que la particule  $\alpha$  arrive vers la cible en suivant, quand la force coulombienne est négligeable, la droite  $y = b$  à la vitesse  $v_0$  ( $x$  décroissant).  $b$  est le paramètre d'impact et  $\sigma = bv_0$  donne avec l'équation (267) la valeur de  $p$ . Quand  $\theta \rightarrow 0$ , la trajectoire (droite) a pour équation  $u = \sin \theta / b \approx \theta / b$  qui doit être identique à l'équation (268) pour  $\theta \rightarrow 0$ , c'est-à-dire à

$$u = \frac{1}{p} + A \cos(\theta - \beta) \approx \frac{1}{p} + A \cos \beta + (A \sin \beta)\theta. \quad (269)$$

On a donc

$$A \cos \beta = -\frac{1}{p}, \quad A \sin \beta = \frac{1}{b} \quad (270)$$

qui déterminent  $A$  et  $\beta$  :

$$A = \sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2}, \quad \tan \beta = -\frac{p}{b}. \quad (271)$$

## Deuxième Partie. Electricité dans l'Atmosphère

### A. Etude de décharges électriques

↑ L'énoncé de cette partie se trouve page 117.

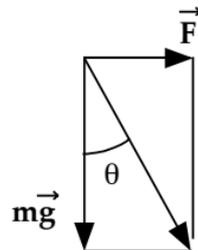
1. La distance  $(P) - (P_0)$  vaut  $e = e_0 - l_0 \sin \theta$ ; le champ électrique entre les plateaux  $(P)$  et  $(P_0)$ , qui est supposé constant et uniforme, est  $E = V/e$ ; la pression électrostatique sur le plateau  $(P)$  est  $p = \epsilon_0 E^2/2$ . La force  $F$  qui s'exerce sur le plateau  $(P)$  est donc

$$F = pS = \frac{\epsilon_0 V^2 S}{2e^2} = \frac{\epsilon_0 V^2 S}{2(e_0 - l_0 \sin \theta)^2} \quad \text{attraction entre } (P) \text{ et } (P_0). \quad (272)$$

2. Supposons que les barres ont une masse négligeable. Les forces agissant sur la barre  $b_1$  sont alors la réaction  $\vec{R}_1$  en  $O_1$  et la force  $\vec{R}'_1$  exercée par la tige  $(T)$ . A l'équilibre, le moment de ces forces est nul ce qui implique que  $\vec{R}_1$  est parallèle à la barre  $b_1$ . La réaction  $\vec{R}_2$  en  $O_2$  sur la barre  $b_2$  est de même parallèle à la barre  $b_2$ .

La résultante des forces extérieures  $\vec{F} + m\vec{g} + \vec{R}_1 + \vec{R}_2$  agissant sur le système tige ( $T$ ) + plateau ( $P$ ) + barres  $b_1$  et  $b_2$  est nulle à l'équilibre. On en déduit que  $\vec{F} + m\vec{g}$  est aussi parallèle aux barres  $b_1$  et  $b_2$  et  $\tan \theta = F/mg$ . D'où l'équation donnant  $\theta$  à l'équilibre :

$$\tan \theta = \frac{\epsilon_0 V^2 S}{2mg(e_0 - l_0 \sin \theta)^2}. \quad (273)$$



On peut aussi obtenir l'équation (273) en utilisant l'énergie  $U = -mgl_0 \cos \theta + Q^2/2C$  où  $C = \epsilon_0 S/e$  est la capacité du condensateur ( $P$ ) — ( $P_0$ ) et  $Q$  sa charge. La conservation de l'énergie s'écrit  $dU = -Md\theta + VdQ$  ou encore  $d\Phi = -Md\theta - QdV = -Md\theta$  pour  $V = \text{Cte}$  avec  $\Phi = U - VQ = U - CV^2$  soit

$$\Phi = -mgl_0 \cos \theta - \frac{\epsilon_0 S V^2}{2(e_0 - l_0 \sin \theta)}. \quad (274)$$

La condition d'équilibre (273) s'obtient par  $M = -\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0$ . Nota :  $M$  est le moment en  $O$ , milieu de  $O_1 O_2$ , des forces agissant sur la tige.

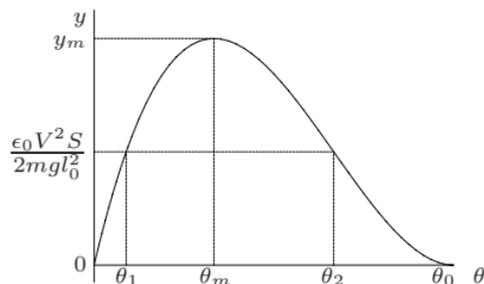
3. et 4. La valeur de  $\theta$

$$\theta_0 = \text{Arcsin} \left( \frac{e_0}{l_0} \right) \approx \frac{e_0}{l_0} = 5,74^\circ \quad (275)$$

correspond aux plateaux en contact. Pour  $\theta \ll 1$ , l'équation (273) s'écrit

$$\theta (\theta_0 - \theta)^2 = \frac{\epsilon_0 V^2 S}{2mgl_0^2}. \quad (276)$$

La courbe  $y(\theta) = \theta (\theta_0 - \theta)^2$ , pour  $0 \leq \theta \leq \theta_0$ , a un maximum  $y_m = \frac{4\theta_0^3}{27}$  pour  $\theta_m = \frac{\theta_0}{3}$ .

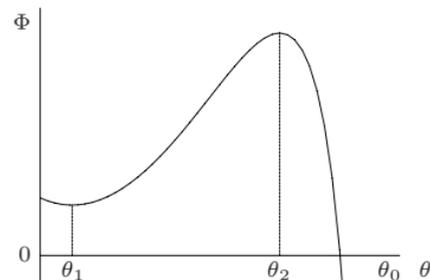


Si

$$\frac{\epsilon_0 V^2 S}{2mg l_0^2} < \frac{4\theta_0^3}{27} \quad (277)$$

il y a deux valeurs  $\theta_1$  et  $\theta_2$  ( $\theta_1 < \theta_m < \theta_2$ ) solutions de l'équation (276).

La solution  $\theta_1$  correspond à un équilibre stable, et la solution  $\theta_2$  à un équilibre instable. Cela peut se montrer en étudiant la courbe  $\Phi(\theta)$ .  $\theta_1$  est un minimum du potentiel  $\Phi$ , et donc position d'équilibre stable, tandis que  $\theta_2$  est un maximum (position d'équilibre instable).



La valeur stable maximale que peut prendre  $\theta$  (c'est la question 4.a.) est donc  $\theta_m = \frac{\theta_0}{3} = 1,90^\circ$ .

On peut donner une expression approchée de  $\theta$  lorsque  $\theta \ll \theta_0$  à partir de l'équation (276) (c'est la question 3., mais si on suppose seulement  $\theta \ll 1$ ,  $\theta$  est racine d'un polynôme de degré 3):

$$\theta \approx \frac{\epsilon_0 V^2 S}{2mg l_0^2 \theta_0^2} = \frac{\epsilon_0 V^2 S}{2mge_0^2}. \quad (278)$$

La valeur maximale  $V_{max}$  mesurable (c'est la question 4.b.) si l'appareil ne peut fonctionner que pour

$\theta \leq \theta_1 = \frac{\theta_m}{2} = \frac{\theta_0}{6}$  est d'après (276)

$$V_{max} = \sqrt{\frac{2\theta_1(\theta_0 - \theta_1)^2 mgl_0^2}{\epsilon_0 S}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5^2 \theta_0^3 mgl_0^2}{6^3 \epsilon_0 S}} = \sqrt{\frac{25e_0^3 mg}{108\epsilon_0 l_0 S}} = 160 \text{ kV.} \quad (279)$$

# 1994 (incomplet)

## 3EME PARTIE. THERMODYNAMIQUE



L'énoncé de cette partie se trouve page [143](#).

**1.a.** L'équation d'état d'un gaz parfait est

$$PV = nRT.$$

(280)

1.b.α. L'enthalpie  $H$  et l'énergie interne  $U$  sont liés de façon générale par  $H = U + PV$ . Pour un gaz parfait on a aussi, d'après l'équation (280),

$$H = U + PV = U + nRT. \quad (281)$$

Bien sûr,  $U$  et  $H$  sont des grandeurs extensives proportionnelles à  $n$ .

*Rappel de cours :* Pour un gaz parfait,  $U$  et  $H$  ne dépendent que de la température du gaz. La propriété est une conséquence de l'équation (280) et des principes de la thermodynamique. Considérons l'énergie interne  $U$  comme une fonction des variables  $T$  et  $V$ . D'après le deuxième principe,

$$dS = \frac{1}{T}dU + \frac{P}{T}dV = \frac{1}{T} \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left( \frac{P}{T} + \frac{1}{T} \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T \right) dV \quad (282)$$

est une différentielle totale. La condition sur les dérivées croisées

$$\left( \frac{\partial}{\partial V} \left[ \frac{1}{T} \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \right] \right)_T = \left( \frac{\partial}{\partial T} \left[ \left( \frac{P}{T} + \frac{1}{T} \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T \right) \right] \right)_V \quad (283)$$

soit

$$\frac{1}{T} \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial T} = \left( \frac{\partial P}{\partial T} \frac{1}{T} \right)_V - \frac{1}{T^2} \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + \frac{1}{T} \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial T} \quad (284)$$

donne la relation d'Helmholtz<sup>35</sup>

$$\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T^2 \left( \frac{\partial P}{\partial T} \frac{1}{T} \right)_V. \quad (285)$$

---

35. Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821-1894)

Pour un gaz parfait,

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial nR}{\partial T}\right)_V = 0. \quad (286)$$

On en déduit que  $U$  ne dépend pas de  $V$  et est donc une fonction d'état ne dépendant que de  $T$ .

**1.b.β.** Dans une transformation infinitésimale et réversible

$$dH = TdS + VdP, \quad dU = TdS - PdV. \quad (287)$$

La quantité de chaleur reçue dans une telle transformation à pression (resp. volume) constant est donc  $dH$  (resp.  $dU$ ). D'après les définitions des capacités calorifiques molaires à pression et à volume constant on a

$$dH = nC_p dT, \quad dU = nC_v dT \quad \Rightarrow \quad d(H - U) = n(C_p - C_v) dT, \quad (288)$$

et comme  $H - U = nRT$  (équation (281))  $\Rightarrow d(H - U) = nR dT$  nous arrivons à la relation de Mayer<sup>36</sup>

$$C_p - C_v = R. \quad (289)$$

**1.b.γ.** En portant  $C_p = \gamma C_v$  dans la relation de Mayer (289) on obtient

$$C_v = \frac{R}{\gamma - 1}. \quad (290)$$

---

36. Julius Robert von Mayer (1814-1878)

**1.b.δ.** Quand  $n$  moles d'un gaz parfait évoluent d'un état initial à la température  $T_0 = P_0V_0/nR$  jusqu'à un état final à la température  $T_1 = P_1V_1/nR$ , la variation d'énergie interne de ce gaz parfait au cours de cette transformation est, d'après les équations (288) et (290) (on utilise le fait que  $C_v$  est indépendant de la température)

$$\Delta U = U_1 - U_0 = nC_v(T_1 - T_0) = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_1 - T_0) = \frac{nR}{\gamma - 1} \left( \frac{P_1V_1}{nR} - \frac{P_0V_0}{nR} \right) = \frac{P_1V_1 - P_0V_0}{\gamma - 1}. \quad (291)$$

**2.a.α.** Le piston étant en équilibre, la pression est la même dans les deux compartiments :

$$P_2 = P_1 = 3P_0. \quad (292)$$

La transformation du gaz dans le compartiment  $B$  est adiabatique réversible. On a donc  $P_0V_0^\gamma = P_2V_2^\gamma$  d'où

$$V_2 = \left( \frac{P_2}{P_0} \right)^{-1/\gamma} V_0 = 3^{-1/\gamma} V_0 \quad (293)$$

et, pour la température  $T_2$  :

$$T_2 = \left( \frac{P_2V_2}{P_0V_0} \right) T_0 = 3^{1-1/\gamma} T_0. \quad (294)$$

**2.a.β.** *Nota* La transformation du gaz dans le compartiment  $A$  n'est adiabatique réversible (le gaz reçoit une

quantité de chaleur). La conservation du volume total des deux compartiments  $V_1 + V_2 = 2V_0$  donne :

$$V_1 = \left(2 - 3^{-1/\gamma}\right) V_0 \quad (295)$$

puis

$$T_1 = \left(\frac{P_1 V_1}{P_0 V_0}\right) T_0 = 3 \left(2 - 3^{-1/\gamma}\right) T_0. \quad (296)$$

**2.b.α.** La conservation de l'énergie (premier principe) donne la quantité de chaleur  $Q_1$  fournie par la résistance chauffante au compartiment  $A$  :

$$Q_1 = \Delta U_1 + \Delta U_2. \quad (297)$$

**2.b.β.** En utilisant l'équation (291) et  $P_1 = P_2 = 3P_0$

$$Q_1 = \frac{P_1 V_1 - P_0 V_0}{\gamma - 1} + \frac{P_2 V_2 - P_0 V_0}{\gamma - 1} = \frac{1}{\gamma - 1} \left[ 3P_0 \underbrace{(V_1 + V_2)}_{2V_0} - 2P_0 V_0 \right] = \frac{4P_0 V_0}{\gamma - 1}. \quad (298)$$

**3.a.** La pression initiale dans le compartiment  $A$  est la pression atmosphérique  $P_0$  (piston en équilibre). La

température initiale dans le compartiment  $A$  est donc

$$T_0 = \frac{P_0 V_A}{nR}. \quad (299)$$

**3.b.α.** Si le volume  $V_B$  est plus grand qu'une valeur-seuil  $V_{B_S}$ , la pression intérieure finale est inférieure à  $P_0$  et le piston va buter contre la paroi  $\mathcal{F}$ . Pour  $V_B < V_{B_S}$ , la pression intérieure finale est égale à  $P_0$  et le piston est en équilibre sans contact avec la paroi  $\mathcal{F}$ .

**3.b.β.** On vient de voir que pour  $V_B < V_{B_S}$  (piston en équilibre)

$$P_1 = P_0. \quad (300)$$

Comme le gaz n'a pas reçu de chaleur, sa variation d'énergie interne

$$\Delta U = \frac{P_0 V_1 - P_0 V_A}{\gamma - 1} \quad (301)$$

est égale au travail  $W$  reçu du piston à pression constante  $P_0$

$$W = P_0 (V_A + V_B - V_1). \quad (302)$$

On en déduit  $(\gamma - 1)P_0(V_A + V_B - V_1) = P_0V_1 - P_0V_A$  et

$$V_1 = V_A + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) V_B. \quad (303)$$

On a bien  $V_1 > V_A$  (détente du gaz). La température finale est

$$T_1 = \frac{P_0V_1}{nR} = \frac{P_0}{nR} \left( V_A + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) V_B \right). \quad (304)$$

On a  $T_1 = T_0 \left(1 + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{V_B}{V_A}\right) > T_0$  en accord avec  $W > 0$ .

**3.b.γ.** La valeur-seuil  $V_{B_s}$  correspond à  $V_1 = V_B$  soit

$$V_{B_s} = \gamma V_A. \quad (305)$$

**3.b.δ.** Pour  $V_B > V_{B_s}$  le piston est contre la paroi  $\mathcal{F}$  et

$$V_2 = V_B. \quad (306)$$

La variation d'énergie interne du gaz

$$\Delta U' = \frac{P_2V_B - P_0V_A}{\gamma - 1} \quad (307)$$

est égale au travail  $W'$  reçu du piston à pression constante  $P_0$

$$W' = P_0 V_A. \quad (308)$$

On en déduit  $(\gamma - 1)P_0 V_A = P_2 V_B - P_0 V_A$  et

$$P_2 = \frac{\gamma P_0 V_A}{V_B}. \quad (309)$$

On a bien  $P_2 < P_0$  pour  $V_B > V_{B_S}$  (détente du gaz). La température finale est

$$T_2 = \frac{P_2 V_B}{nR} = \frac{\gamma P_0 V_A}{nR}. \quad (310)$$

Noter que, dans ce cas ( $V_B > V_{B_S}$ ),  $T_2$  et  $W'$  ne dépendent pas de  $V_B$ . On a  $T_2 = \gamma T_0 > T_0$  en accord avec  $W' > 0$ .

**3.c.α.** Egalons les expressions (287) et (288) de  $dU$

$$T dS - P dV = nC_v dT \Rightarrow dS = nC_v \frac{dT}{T} + \frac{P}{T} dV. \quad (311)$$

Remplaçons y  $\frac{P}{T} = \frac{nR}{V} = \frac{n(C_p - C_v)}{V} = (\gamma - 1) \frac{nC_v}{V}$ . On obtient

$$dS = nC_v \left( \frac{dT}{T} + (\gamma - 1) \frac{dV}{V} \right) \quad (312)$$

qui donne par intégration

$$S = nC_v \log(TV^{\gamma-1}) + \text{Cte} = nC_v \log(PV^\gamma) + \text{Cte} \quad (313)$$

où la dernière égalité s'obtient en remplaçant  $T$  par  $PV/nR$ . On a donc

$$S = \frac{nC_p}{\gamma} \log(PV^\gamma) + \text{Cte}. \quad (314)$$

**3.c.β.** La variation d'entropie du gaz dans le cas où l'état final est celui du 3.b.β est

$$\Delta S_1 = \frac{nC_p}{\gamma} [\log(P_0 V_1^\gamma) - \log(P_0 V_A^\gamma)] = nC_p \log \frac{V_1}{V_A} \quad (315)$$

et d'après l'équation (303)

$$\Delta S_1 = nC_p \log \left( 1 + \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{V_B}{V_A} \right). \quad (316)$$

On a  $\Delta S_1 > 0$  qui satisfait au second principe de la thermodynamique pour l'évolution d'un système thermiquement isolé.

**3.c. $\gamma$ .** La variation d'entropie du gaz dans le cas où l'état final est celui du 3.b. $\delta$  est

$$\Delta S_2 = \frac{nC_p}{\gamma} [\log(P_2 V_B^\gamma) - \log(P_0 V_A^\gamma)] = \frac{nC_p}{\gamma} \log \left( \gamma \left( \frac{V_B}{V_A} \right)^{\gamma-1} \right). \quad (317)$$

Comme  $V_B \geq V_{B_s} = \gamma V_A$ ,  $\Delta S_2 \geq nC_p \log \gamma > 0$  qui satisfait au second principe de la thermodynamique pour l'évolution d'un système thermiquement isolé.

# 1995 (incomplet)

## Première partie. Phénomènes liés à l'atmosphère terrestre

### A) Stabilité de l'atmosphère terrestre



L'énoncé de cette partie se trouve page 151.

1. La force de gravitation exercée sur une masse  $m$  à l'altitude  $z$  par la Terre de masse  $M_T$  supposée à

symétrie sphérique est

$$\vec{F} = -\frac{K m M_T \vec{u}}{(R+z)^2}. \quad (318)$$

2. Le champ de gravitation  $\vec{G}$  créé par la planète Terre au point  $P$  est

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{K M_T \vec{u}}{(R+z)^2}. \quad (319)$$

Comme le champ de gravitation au niveau de la surface de la Terre est  $\vec{G}_0 = -\frac{K M_T \vec{u}}{R^2}$ , on a

$$\vec{G} = \frac{R^2}{(R+z)^2} \vec{G}_0 \quad \text{et} \quad G = \frac{R^2}{(R+z)^2} G_0. \quad (320)$$

3. La force de gravitation dérive de l'énergie potentielle

$$E_p = -\frac{K m M_T}{R+z} = -\frac{m G_0 R^2}{R+z} \quad (321)$$

puisque  $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$ . L'énergie potentielle n'est définie qu'à une constante additive près. L'expression (321) correspond à la convention que l'énergie potentielle s'annule lorsque la masse  $m$  est infiniment distante de la Terre.

4. Dans le référentiel géocentrique (origine au centre de la Terre, axes orientés sur les étoiles), supposé galiléen (on néglige les effets du mouvement annuel de la Terre), l'énergie mécanique  $E_m$  est la somme de l'énergie potentielle  $E_p$  et de l'énergie cinétique  $E_c = mV^2/2$  du corps de masse  $m$  et de vitesse  $\vec{V}$  dans ce repère :

$$E_m = E_p + E_c = \frac{mV^2}{2} - \frac{mG_0R^2}{R+z} \quad (322)$$

Si la masse  $m$  échappe à la gravitation terrestre, son énergie mécanique, qui se réduit alors à son énergie cinétique, est positive ou nulle ( $E_m \geq 0$ ). Sa vitesse initiale  $V_0$  à l'altitude  $z = 0$  doit donc vérifier

$$E_m = \frac{mV_0^2}{2} - mG_0R \geq 0 \quad \text{soit} \quad V_0 \geq V_l = \sqrt{2G_0R}. \quad (323)$$

Ainsi, pour échapper à la gravitation terrestre, la vitesse initiale doit être plus grande que la vitesse de libération  $V_l = \sqrt{2G_0R} = 11200 \text{ m s}^{-1}$ .

5. La trajectoire est une conique admettant le centre de la Terre pour un de ses foyers :

- si  $V_0 < V_l$ , c'est une ellipse
- si  $V_0 = V_l$ , c'est une parabole
- si  $V_0 > V_l$ , c'est une hyperbole.

- 6.a.** La force  $\vec{f}$  exercée par l'atmosphère sur  $S$ , interprétée comme la force pressante exercée sur  $S$  par le fluide de pression  $p_0$ , est  $f = p_0 S$ . Interprétée comme le poids des  $n_0$  molécules de masse  $m_a$  au dessus de  $S$ , c'est  $f = n_0 m_a G_0$ . On en déduit

$$n_0 = \frac{p_0 S}{m_a G_0}. \quad (324)$$

- 6.b.** La surface de la Terre vaut  $S = 4\pi R^2$ ; le nombre total de molécules dans l'atmosphère terrestre est donc

$$N_0 = \frac{4\pi R^2 p_0}{m_a G_0} = 1,05 \cdot 10^{44}. \quad (325)$$

La vitesse la plus probable vaut

$$V_p = \sqrt{\frac{2kT}{m_a}} = 407 \text{ m s}^{-1}. \quad (326)$$

- 7.** Le nombre de molécules ayant une vitesse supérieure à  $x_0 V_p$  est

$$N = \frac{4N_0}{\sqrt{\pi}} \int_{x_0 V_p}^{\infty} \frac{V^2}{V_p^3} \exp\left(-\frac{V^2}{V_p^2}\right) dV = \frac{4N_0}{\sqrt{\pi}} \int_{x_0}^{\infty} x^2 \exp(-x^2) dx \approx \frac{2N_0}{\sqrt{\pi}} x_0 \exp(-x_0^2), \quad (327)$$

où on a utilisé  $x = V/V_p$  comme variable d'intégration.

8. Pour  $x_0 = V_l/V_p = 27,5$ , l'équation (327) donne  $N = 1,6 \cdot 10^{-283}$ . Autrement dit, dans ce modèle, il n'y a aucune molécule de l'atmosphère terrestre possédant une vitesse lui permettant de quitter la Terre.
9. La masse d'une mole de mélange de l'atmosphère terrestre, qui contient 0,8 mole de  $N_2$  (28 g) et 0,2 mole de  $O_2$  (32 g) est  $0,8 \times 28 \text{ g} + 0,2 \times 32 \text{ g} = 28,8 \text{ g}$  pour  $6 \cdot 10^{23}$  molécules. La masse moyenne d'une molécule est bien

$$m_a = \frac{28,8 \text{ g}}{6 \cdot 10^{23}} = 4,8 \cdot 10^{-26} \text{ kg.} \quad (328)$$

10. Pour le dihydrogène, on a

$$V_p = \sqrt{\frac{2kT}{m_a}} = 1576 \text{ m s}^{-1}, \quad x_0 = \frac{V_l}{V_p} = 7,11, \quad N = 9 \cdot 10^{22}. \quad (329)$$

Il y a donc une proportion  $N/N_0$  de l'ordre de  $10^{-21}$  de molécules de dihydrogène susceptibles de s'échapper de l'atmosphère, à la différence de l'azote ou de l'oxygène. Le modèle prévoit qu'une atmosphère est stable si la vitesse la plus probable des molécules  $V_p$ , qui dépend de la température  $T$  et de la masse des molécules, est un ordre de grandeur plus faible que la vitesse de libération  $V_l$ . Le modèle explique donc que les molécules des gaz assez lourds (azote), mais pas des gaz trop légers (hydrogène), sont retenues par la gravitation de la Terre à la température  $T = 300 \text{ K}$ . Appliqué à la Lune à la même

température, où  $V_l = 2,4 \text{ km s}^{-1}$ , le modèle explique l'absence d'atmosphère: même les gaz lourds ne sont pas retenus par la gravitation.

D'autre part, le modèle semble indiquer que la Terre pourrait s'appauvrir en élément hydrogène. Mais cela peut être critiqué pour les raisons suivantes.

- La teneur de l'atmosphère terrestre en hydrogène gazeux est assez faible. L'hydrogène est présent sur Terre essentiellement sous forme d'eau dans les océans, et sous cette forme a fort peu de chances d'échapper à la gravitation terrestre.
- La température des hautes couches de l'atmosphère est très inférieure à 300 K, ce qui réduit  $V_p$  et le nombre calculé de molécules s'échappant de l'atmosphère.
- Il existe un flux de particules tombant sur la Terre en provenance de l'espace.

## B) Etude électrique du système (terre, atmosphère)



L'énoncé de cette partie se trouve page 156.

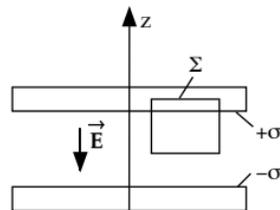
1. Dans un condensateur plan, assez grand pour négliger les effets de bord, le champ électrostatique  $\vec{E}$  est uniforme, perpendiculaire aux armatures, dirigé de l'armature positive vers l'armature négative. Sa

valeur est obtenue par application du théorème de Gauss<sup>37</sup> à un volume cylindrique, surface de base  $\Sigma$ , limité dans le vide et dans le métal d'une armature :

$$\text{flux sortant de } \vec{E} = E\Sigma = \frac{\text{charge intérieure}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma\Sigma}{\epsilon_0}. \quad (330)$$

D'où

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (331)$$



2. Le potentiel  $V$  est la circulation sur la longueur  $z_0$  du champ électrique uniforme  $\vec{E}$  :

$$V = Ez_0. \quad (332)$$

La charge  $Q$  de l'armature positive est égale à  $Q = \sigma S$ . On en tire avec l'équation (331)

$$Q = \epsilon_0 ES. \quad (333)$$

3. La capacité  $C$  est le rapport  $C = Q/V$ . Elle est donnée par le rapport des équations (333) et (332),

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 S}{z_0} = 17,7 \cdot 10^{-12} \text{ F} = 17,7 \text{ pF}. \quad (334)$$

---

37. Johann Karl Friedrich Gauss (1777-1855)

L'énergie électrostatique  $W$  est l'énergie à fournir pour charger le condensateur à la tension  $V$ . En désignant les valeurs intermédiaires de la tension par  $v$  et de la charge par  $q$ , elle s'écrit :

$$W = \int_0^V v dq = C \int_0^V v dv = \frac{1}{2} CV^2 = 22,1 \cdot 10^{-9} \text{ J.} \quad (335)$$

4. Pour un condensateur sphérique, le champ électrostatique est radial et dépend de la distance au centre de la Terre  $R + z$ . Entre les armatures, ce champ est le même que celui d'une charge ponctuelle  $-Q$  placée en  $O$  :

$$E(z) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0(R+z)^2}. \quad (336)$$

Le signe  $-$  signifie que le champ électrostatique pointe vers  $O$ .

5. La circulation de  $\vec{E}$  le long d'une verticale donne la tension :

$$V = \int_{z_0}^0 E(z) dz = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{z_0} \frac{dz}{(R+z)^2} = \frac{Qz_0}{4\pi\epsilon_0 R(R+z_0)}. \quad (337)$$

D'où la capacité

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 R(R+z_0)}{z_0}. \quad (338)$$

6. Pour  $z_0 \ll R$

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 R(R + z_0)}{z_0} \approx \frac{\epsilon_0 4\pi(R + z_0/2)^2}{z_0} = \frac{\epsilon_0 S}{z_0} = 91 \text{ mF}, \quad (339)$$

où  $S = 4\pi(R + z_0/2)^2$  est la surface médiane du condensateur. Le système se comporte comme un condensateur plan de surface  $S$  et distance entre armatures  $z_0$ . L'énergie électrostatique vaut

$$W = \frac{1}{2}CV^2 = 7,3 \cdot 10^9 \text{ J}. \quad (340)$$

Le champ électrostatique vaut d'après l'équation (332)

$$E = \frac{V}{z_0} = 8 \text{ V m}^{-1}. \quad (341)$$

7. Si la Terre porte la charge uniforme  $-Q'$ , le champ  $E_0$  au voisinage de la surface terrestre s'obtient comme dans la question 4 :

$$E_0 = -\frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 R^2}. \quad (342)$$

On en déduit

$$Q' = 4\pi\epsilon_0 R^2 |E_0| = 4,55 \cdot 10^5 \text{ C}. \quad (343)$$

8. Au niveau du sol la cause principale d'ionisation de l'atmosphère est la radioactivité naturelle. Le taux d'ionisation  $y$  est en moyenne de l'ordre de  $9 I$ , en notant  $I$  une ionisation par  $\text{cm}^3$  et par seconde. Les ions ont une durée de vie de quelques dizaines de secondes avant de se recombiner en molécules. On observe ainsi, au niveau du sol, environ  $5 \cdot 10^8$  ions par  $\text{m}^3$ , à comparer aux  $3 \cdot 10^{25}$  molécules par  $\text{m}^3$ . Cette cause d'ionisation diminue fortement avec l'altitude.

En altitude, jusqu'à 50 km d'altitude environ, la cause principale d'ionisation de l'atmosphère est le rayonnement cosmique. Au sol, le taux d'ionisation de ce processus est de l'ordre de  $2 I$ , mais, quand on s'élève, il augmente environ 50 fois pour atteindre un maximum vers 10 km d'altitude. Il décroît ensuite, par suite de la raréfaction de l'atmosphère.

Au dessus de 50 km d'altitude, dans l'ionosphère, l'ionisation par le rayonnement électromagnétique solaire (surtout ultraviolet) devient important.

Il y a d'autres causes naturelles d'ionisation (décharges électriques du type foudre, frottement des gouttes d'eau dans les nuages, collisions entre molécules).

9. Le courant Terre-atmosphère, d'intensité  $J = j4\pi R^2 = 1800 \text{ A}$ , apporte 1800 C par seconde à la Terre. Pour compenser cet apport de charges par des impacts de foudre apportant  $-20 \text{ C}$  chacun, il faut en moyenne  $1800/20 = 90$  impacts par seconde.

## Deuxième partie. Fonctionnement d'un haut parleur

### A) Etude mécanique

↑ L'énoncé de cette partie se trouve page 161.

#### I. Oscillations libres.

**1.a.** Le poids du point matériel  $M$  est compensé par la réaction de la tige. La force agissant sur  $M$  se limite à la force de rappel  $\vec{F}_r = -kz\vec{u}_z$  et l'équation différentielle du mouvement de  $M$  est :

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -kz, \quad \text{soit} \quad \ddot{z} + \frac{k}{m}z = 0. \quad (344)$$

**1.b.** La solution de l'équation (344) satisfaisant les conditions initiales ( $z(0) = z_0$ ,  $\dot{z}(0) = 0$ ) est

$$z = z_0 \cos \omega_0 t \quad \text{de pulsation} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et de période} \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (345)$$

**1.c.** Numériquement, la période est  $T_0 = 14,3$  ms et la fréquence  $N_0 = 1/T_0 = 69,7$  Hz.

**2.a.** En tenant compte de la force de frottement  $\vec{F} = -f\dot{z}\vec{u}_z$ , la nouvelle équation différentielle du mouvement est

$$m\frac{d^2z}{dt^2} + f\frac{dz}{dt} + kz = 0. \quad (346)$$

**2.b.** L'équation caractéristique qui donne les solutions de la forme  $z = \exp(rt)$  de l'équation (346) est

$$mr^2 + fr + k = 0. \quad (347)$$

Le régime critique correspond à une valeur  $f = f_c$  telle que l'équation (347) a une racine double :

$$f_c = 2\sqrt{km} = 7 \text{ kg s}^{-1}. \quad (348)$$

**2.c.** Portant  $k = m\omega_0^2$  et  $f = \alpha f_c = 2\alpha\sqrt{km} = 2\alpha\omega_0 m$  dans l'équation (346) on obtient

$$\ddot{z} + 2\alpha\omega_0\dot{z} + \omega_0^2 z = 0. \quad (349)$$

**2.d.**

$\alpha > 1$  L'équation caractéristique (347), soit  $r^2 + 2\alpha\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$  a deux racines réelles négatives

$$r_{\pm} = -\omega_0 \left( \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1} \right). \quad (350)$$

La solution de l'équation du mouvement (349) est la superposition de deux exponentielles décroissantes. Le régime est apériodique.

$\alpha < 1$  L'équation caractéristique (347) a deux racines complexes conjuguées

$$r_{\pm} = -\lambda \mp i\omega = -\omega_0 \left( \alpha \pm i\sqrt{1 - \alpha^2} \right). \quad (351)$$

La solution de l'équation du mouvement (349) est la superposition de deux sinusoides amorties. Le régime est pseudopériodique.

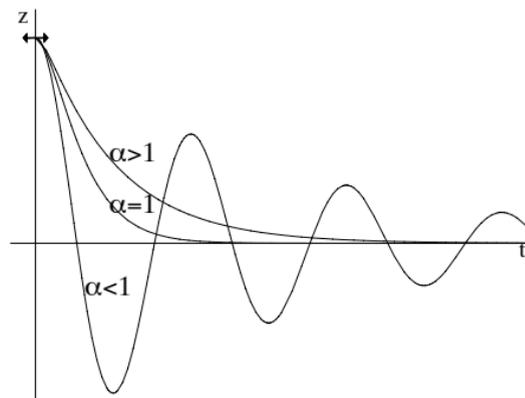
$\boxed{\alpha = 1}$  L'équation caractéristique (347) a une racine réelle double négative

$$r = -\alpha\omega_0. \quad (352)$$

La solution de l'équation du mouvement (349) est une exponentielle décroissant multipliée par une fonction affine :

$$z = z_0(1 + \alpha\omega_0 t) \exp(-\alpha\omega_0 t). \quad (353)$$

Le régime est critique et  $z$  tend vers 0 plus rapidement que pour les autres valeurs de  $\alpha$ .



**3.a.** Pour  $\alpha \neq 1$ , la solution générale de l'équation du mouvement (349) est

$$z = A_+ \exp(r_+ t) + A_- \exp(r_- t) \quad (354)$$

et la solution satisfaisant les conditions initiales ( $z(0) = z_0$ ,  $\dot{z}(0) = 0$ ) est

$$z = \frac{z_0}{r_- - r_+} (r_- \exp(r_+ t) - r_+ \exp(r_- t)). \quad (355)$$

Pour  $\alpha < 1$ ,  $r_{\pm} = -\lambda \mp i\omega$  sont donnés par l'équation (351) et on a

$$z = \frac{z_0}{2i\omega} [(-\lambda + i\omega) \exp(-i\omega t) - (-\lambda - i\omega) \exp(i\omega t)] \exp(-\lambda t) = z_0 \left[ \cos(\omega t) + \frac{\lambda}{\omega} \sin(\omega t) \right] \exp(-\lambda t). \quad (356)$$

Le mouvement a la pseudopériode

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \alpha^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \alpha^2}}. \quad (357)$$

**3.b.**  $T = 14,4$  ms et  $\frac{T - T_0}{T_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}} - 1 \approx \frac{\alpha^2}{2} = 0,5\%$  La pseudopériode est peu différente de la période quand les frottements sont faibles.

**3.c.α.** Pour l'oscillateur

$$z = a \cos(\omega_0 t + \phi), \quad \dot{z} = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi) \quad (358)$$

l'énergie cinétique  $E_c$  et potentielle  $E_p$  sont

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 = \frac{ma^2 \omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \phi) = \frac{ka^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \phi), \quad E_p = \frac{1}{2} k z^2 = \frac{ka^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \phi). \quad (359)$$

L'énergie  $E$  de cet oscillateur est donc

$$E = E_c + E_p = \frac{ka^2}{2} = \frac{ma^2\omega_0^2}{2}. \quad (360)$$

**3.c.β.** Le travail  $W$  de la force de frottement  $-f\dot{z}$  au cours d'une période est

$$\begin{aligned} W &= \int_{\text{période}} -f\dot{z}dz = -f \int_0^{T_0} \dot{z} \frac{dz}{dt} dt = -f \int_0^{T_0} \dot{z}^2 dt = -f \int_0^{T_0} a^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi) dt \\ &= -\frac{fa^2\omega_0^2 T_0}{2} = -2\pi\alpha ma^2\omega_0^2. \end{aligned} \quad (361)$$

**3.c.γ.** Le rapport  $Q$  vaut d'après les équations (360) et (361)

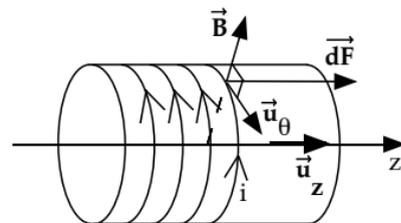
$$Q = -\frac{2\pi E}{W} = \frac{1}{2\alpha} = \frac{m\omega_0}{f}. \quad (362)$$

**3.c.δ.** On appelle habituellement  $Q$  *facteur de qualité* de l'oscillateur. Dans le cas d'oscillateurs électriques on l'appelle aussi *coefficient de surtension* du circuit.

## II. Oscillations forcées.

1. La force magnétique  $d\vec{F} = i d\vec{l} \wedge \vec{B} = -iBdl\vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_r = iBdl\vec{u}_z$  exercée sur un élément de circuit  $d\vec{l}$  est représentée sur la figure pour un courant positif ( $i > 0$ ). La force magnétique exercée sur l'enroulement est donc

$$\vec{F} = iBl\vec{u}_z. \quad (363)$$



2. En tenant compte de la force magnétique  $iBl\vec{u}_z$ , l'équation différentielle du mouvement est

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + f \frac{dz}{dt} + kz = iBl. \quad (364)$$

Portant  $k = m\omega_0^2$  et  $f = \alpha f_c = 2\alpha\sqrt{km} = 2\alpha\omega_0 m$  dans l'équation (364) on obtient

$$\ddot{z} + 2\alpha\omega_0 \dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{iBl}{m}. \quad (365)$$

La solution de l'équation sans second membre est celle étudiée en I ; c'est le régime transitoire qui se manifeste au moment où on détruit l'équilibre de l'oscillateur ; elle tend vers 0 pour  $t \rightarrow \infty$ . Le régime forcé correspond à la solution particulière de l'équation (365) de forme *sinusoïdale* et de même fréquence

que  $i$ . Au bout d'un certain temps, lorsque le régime transitoire est devenu négligeable, la solution de l'équation (365) devient insensible aux conditions initiales et est donnée par le régime forcé.

**3.a.** Le régime forcé de l'équation (365) s'écrit en représentation complexe  $\bar{z} = a \exp[j(\omega t + \phi)]$ , donné par

$$(-\omega^2 + 2j\alpha\omega_0\omega + \omega_0^2) \bar{z} = \frac{Bl}{m} \bar{i} \quad \text{soit} \quad \bar{z} = \frac{Bl/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\alpha\omega_0\omega} \bar{i}. \quad (366)$$

L'amplitude  $a$  est donnée par le module de  $\bar{z}$ :

$$a = |\bar{z}| = \frac{BlI_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega_0^2\omega^2}}. \quad (367)$$

La phase  $\phi$  est donnée par l'argument de  $\bar{z}/\bar{i}$ :

$$\tan \phi = \frac{2\alpha\omega_0\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad \text{avec (mod } 2\pi) \quad \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq 0, & \text{si } 0 \leq \omega \leq \omega_0 \\ -\pi < \phi < -\frac{\pi}{2}, & \text{si } \omega_0 < \omega. \end{cases} \quad (368)$$

**3.b.** On a d'après l'équation (367)

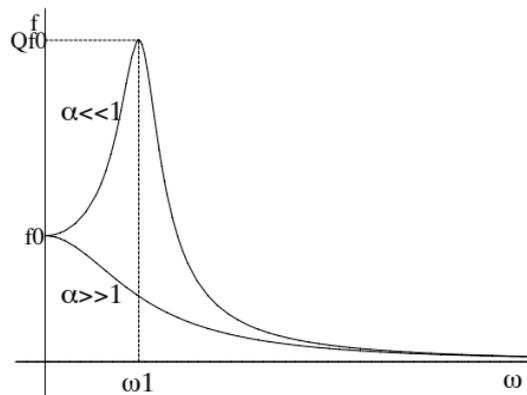
$$f(\omega) = \frac{a}{I_0} = \frac{f_0}{\sqrt{(1-x^2)^2 + 4\alpha^2x^2}} \quad \text{où} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{et} \quad f_0 = \frac{Bl}{m\omega_0^2}. \quad (369)$$

La dérivée

$$\frac{df}{dx} = \frac{2f_0x(1 - 2\alpha^2 - x^2)}{((1 - x^2)^2 + 4\alpha^2x^2)^{3/2}} \quad (370)$$

s'annule pour  $\omega = 0$  ( $x = 0$ ) et pour  $\omega = \omega_1 = \omega_0\sqrt{1 - 2\alpha^2}$  ( $x^2 = 1 - 2\alpha^2$ ) si  $\alpha < 1/\sqrt{2}$ . Pour  $\alpha \ll 1$ ,  $f$  présente un maximum à la pulsation  $\omega_1 = \omega_0\sqrt{1 - 2\alpha^2} \approx \omega_0(1 - \alpha^2)$  de valeur  $f_{\max} \approx f_0/(2\alpha) = f_0Q$ . Le facteur de qualité  $Q$  apparaît comme le rapport des valeurs de  $f$  au maximum et à l'origine.

Pour  $\alpha \gg 1$  (en fait pour  $\alpha > 1/\sqrt{2}$ )  $f$  est décroissante.



## B) Etude énergétique



L'énoncé de cette partie se trouve page 167.

### I. Bilan électromécanique.

1. Le champ électromoteur est

$$\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B} = vB\vec{u}_z \wedge \vec{u}_r = vB\vec{u}_\theta \quad (371)$$

et la f.é.m d'induction aux bornes de la bobine est la circulation de  $E_m$  le long de la bobine :

$$e = \int_{\text{bobine}} \vec{E}_m \cdot \vec{dl} \quad \text{où} \quad \vec{dl} = -dl\vec{u}_\theta. \quad (372)$$

On en déduit

$$e = -vBl. \quad (373)$$

2. L'équation des mailles relative au circuit de l'enroulement s'écrit

$$u = ri + L\frac{di}{dt} - e \quad \text{soit} \quad u = ri + L\frac{di}{dt} + vBl. \quad (374)$$

3. Le système est décrit par les équations couplées (364) et (374) (avec  $v = dz/dt$ ):

$$m\frac{dv}{dt} + fv + kz = iBl \quad (375)$$

$$L\frac{di}{dt} + ri + vBl = u. \quad (376)$$

On multiplie l'équation (375) par  $v$ , l'équation (376) par  $i$  et on ajoute pour éliminer  $B$  :

$$mv \frac{dv}{dt} + fv^2 + kzv + Li \frac{di}{dt} + ri^2 = ui \quad (377)$$

soit

$$ui = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}mv^2 \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}Li^2 \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}kz^2 \right) + ri^2 + fv^2. \quad (378)$$

La puissance électrique reçue par le circuit  $ui$  est la somme de 5 termes. Les 3 premiers sont la dérivée de l'énergie stockée sous forme cinétique, électromagnétique et élastique. Le quatrième  $ri^2$  est la puissance dissipée par effet Joule. Le cinquième  $fv^2$  est la puissance de la force exercée sur le fluide environnant.

## II. Puissance acoustique.

1. L'intensité acoustique  $I$  est donnée par

$$I_{dB} = 10 \log \frac{I}{I_0} \quad \text{soit} \quad I = I_0 10^{I_{dB}/10} = \begin{cases} 7,94 \cdot 10^{-4} \text{ W m}^{-2} \text{ à } 60 \text{ Hz,} \\ 7,94 \cdot 10^{-3} \text{ W m}^{-2} \text{ à } 200 \text{ Hz.} \end{cases} \quad (379)$$

2. Le flux de l'intensité acoustique à travers la sphère de rayon  $R$  centrée sur le haut-parleur est  $2\pi R^2 I$ , l'intensité étant uniforme et égale à  $I$  dans un demi-espace et nulle dans l'autre. Ce flux est aussi la

puissance acoustique  $P_a$  émise par le haut-parleur. On a donc

$$P_a = 2\pi R^2 I = \begin{cases} 5 \text{ mW à } 60 \text{ Hz,} \\ 50 \text{ mW à } 200 \text{ Hz.} \end{cases} \quad (380)$$

Le rendement acoustique est

$$\rho = \frac{P_a}{P_e} = \begin{cases} 2,5\% \text{ à } 60 \text{ Hz,} \\ 6\% \text{ à } 200 \text{ Hz.} \end{cases} \quad (381)$$

Le rendement est assez faible.

- 3.** Il y a des pertes par effet Joule et, surtout, au niveau de l'interaction de la membrane avec l'air.

# 1996 (incomplet)

## DEUXIEME PARTIE. Etude de convertisseurs d'énergie

### I) Etude thermodynamique théorique d'un moteur à combustion interne



L'énoncé de cette partie se trouve page 181.

#### Préliminaires

1. Un système fermé est un système qui n'échange pas de matière avec l'extérieur. A la différence d'un système isolé, il peut interagir et échanger de l'énergie avec l'extérieur. A ces échanges d'énergie sont associés, par la relation d'Einstein  $E = mc^2$ , des variations de masse du système. Ces variations de masse sont négligeables dans ce problème.

Le premier principe est l'énoncé, en thermodynamique, de la conservation de l'énergie. On l'énonce en distinguant deux types d'énergie – travail et chaleur –,

$$\Delta E = E_2 - E_1 = W + Q \quad (382)$$

où  $\Delta E$  est l'énergie reçue par un système fermé subissant une transformation l'amenant d'un état 1 à un état 2,  $W$  est le travail reçu, et  $Q$  la quantité de chaleur reçue. Le principe pose qu'on peut définir une fonction  $E$  dépendant de l'état du système, appelée *énergie totale* du système. Sa valeur est notée  $E_i$  pour l'état  $i$  du système. On pose de plus

$$E = E_m + U \quad (383)$$

où  $E_m$  est l'énergie mécanique (macroscopique) et  $U$  est appelée l'*énergie interne* du système. On utilise souvent des systèmes (par exemple un fluide au repos) où l'énergie mécanique  $E_m$  reste constante. L'équation (382) se réduit alors à

$$\Delta U = U_2 - U_1 = W + Q. \quad (384)$$

Dans ce problème, les états considérés sont à l'équilibre thermodynamique.

2. L'équation d'état du système est

$$PV = nRT. \quad (385)$$

Pour un gaz parfait, l'énergie interne  $U(T)$  ne dépend que de la température. En envisageant une transformation à volume constant (sans échange de travail), où la température du gaz croît de  $dT$  quand il reçoit la quantité de chaleur  $nC_{V_m}dT$ , on a

$$dU = nC_{V_m}dT. \quad (386)$$

3. Une transformation est isentropique si l'entropie du système reste constante *tout au cours* de la transformation. Un exemple typique en est une transformation adiabatique réversible.

Pour une transformation infinitésimale du système

$$dU = TdS - PdV. \quad (387)$$

Pour une transformation infinitésimale isentropique ( $dS = 0$ ) les équations (387) et (386) (où  $C_{V_m} = R/(\gamma - 1)$ ) donnent

$$dU = \frac{nRdT}{\gamma - 1} = -PdV. \quad (388)$$

En utilisant l'équation d'état (385) on a

$$\frac{nRdT}{\gamma - 1} = -\frac{nRTdV}{V} \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{T} + (\gamma - 1)\frac{dV}{V} = 0 \quad \Rightarrow \quad d(TV^{\gamma-1}) = 0. \quad (389)$$

La grandeur  $TV^{\gamma-1}$  reste donc invariante au cours de cette transformation.

### Etude du moteur

4. La chaleur échangée dans l'étape  $B \rightarrow C$  est la variation d'énergie  $Q_1 = U_C - U_B$ , puisque il n'y a pas de travail échangé, le volume restant constant. L'équation (386) donne,  $C_{V_m}$  étant constant,

$$Q_1 = nC_{V_m}(T_C - T_B). \quad (390)$$

D'après l'équation d'état (385), comme  $V_C = V_B = V_{\min}$  et  $P_C > P_B$  la température  $T_C$  est plus grande que  $T_B$ . Le gaz reçoit donc une quantité de chaleur positive.

5. On a de la même manière

$$Q_2 = -nC_{V_m}(T_D - T_A), \quad (391)$$

où  $T_D > T_A$ . On a donc  $Q_2 < 0$ .

6. Pour le cycle, la chaleur échangée est  $Q = Q_1 + Q_2$  et la variation d'énergie  $\Delta U = 0$ . L'équation (384) donne  $W + Q_1 + Q_2 = 0$  soit

$$W = -(Q_1 + Q_2). \quad (392)$$

7. Le rendement thermodynamique  $\eta$  du moteur est le rapport du travail obtenu ( $-W$ ) à la chaleur fournie

( $Q_1$ ). On a donc, d'après l'équation (392)

$$\eta = \frac{-W}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \left| \frac{Q_2}{Q_1} \right|. \quad (393)$$

8. D'après les équations (393), (390) et (391)

$$\eta = 1 - \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B}. \quad (394)$$

Dans les transformations isentropiques  $A \rightarrow B$  et  $C \rightarrow D$

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \quad \Rightarrow \quad T_B = T_A \left( \frac{V_A}{V_B} \right)^{\gamma-1} = T_A \tau^{\gamma-1}, \quad T_C = T_D \left( \frac{V_D}{V_C} \right)^{\gamma-1} = T_D \tau^{\gamma-1}. \quad (395)$$

En portant ces expressions de  $T_B$  et  $T_C$  dans l'équation (394) on obtient

$$\eta = 1 - \frac{T_D - T_A}{(T_D - T_A) \tau^{\gamma-1}} = 1 - \left( \frac{1}{\tau} \right)^{\gamma-1}. \quad (396)$$

A.N.  $\tau = 0,53$ .

Le rendement du cycle de Beau de Rochas<sup>38</sup> ne dépend que du taux de compression. Plus ce taux est élevé et meilleur est le rendement. Dans le cas du moteur à essence, pendant longtemps on n'a pu dépasser le rapport 4, du fait de la détonation du mélange d'air et d'essence subitement comprimé. L'addition à l'essence de produits antidétonants a permis d'augmenter le rapport de compression.

9. De  $C_y = V_{\max} - V_{\min} = (\tau - 1)V_{\min}$  on tire

$$V_{\min} = \frac{C_y}{\tau - 1}, \quad V_{\max} = \tau V_{\min} = \frac{\tau C_y}{\tau - 1}. \quad (397)$$

A.N.  $V_{\min} = 0,22 \text{ l}$ ,  $V_{\max} = 2,22 \text{ l}$ .

10. Le mélange air-essence admis a la température  $T_A = 320 \text{ K}$ , la pression  $P_A = 100 \text{ kPa}$  et le volume  $V_A = 2,22 \text{ l}$ . Le nombre de moles de mélange est d'après l'équation d'état (385)

$$n = \frac{RT_A}{P_A V_A} = 8,35 \cdot 10^{-2} \text{ mol}. \quad (398)$$

Puisque le mélange gazeux admis contient 1 mole de carburant pour 60 moles de mélange, la quantité de gaz  $n'$  de carburant consommé par cycle est

$$n' = \frac{n}{60} = 1,39 \cdot 10^{-3} \text{ mol}. \quad (399)$$

---

38. Alphonse Beau de Rochas (1815-1893)

11. D'après l'équation (395)

$$T_B = T_A \tau^{\gamma-1} = 684 \text{ K.} \quad (400)$$

Le pouvoir calorifique du carburant utilisé étant égal à  $q_m = 4200 \text{ kJ}$  par mole de carburant,  $Q_1 = n'q_m = 5,84 \text{ kJ}$ . D'après l'équation (390) et  $C_{Vm} = R/(\gamma - 1)$

$$Q_1 = n \frac{R}{\gamma - 1} (T_C - T_B) \Rightarrow T_C = T_B + \frac{(\gamma - 1)}{nR} Q_1 = T_A \tau^{\gamma-1} + (\gamma - 1) \left( \frac{n'}{n} \right) \frac{q_m}{R} = 3460 \text{ K.} \quad (401)$$

La pression dans l'état  $C$  est d'après l'équation d'état :

$$P_C = \frac{nRT_C}{V_C} = 1,09 \cdot 10^7 \text{ Pa.} \quad (402)$$

12. La valeur du transfert thermique vers l'extérieur au cours d'un cycle du moteur est

$$-Q_2 = (W + Q_1) = (1 - \eta)Q_1 = \left( \frac{1}{\tau} \right)^{\gamma-1} Q_1 = 2,73 \text{ kJ.} \quad (403)$$

Le travail fourni à l'extérieur au cours d'un cycle du moteur est

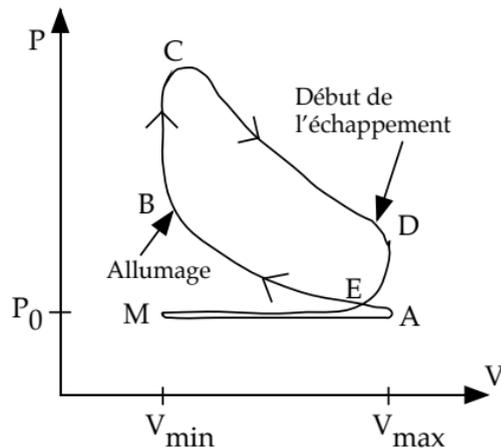
$$-W = \eta Q_1 = 3,10 \text{ kJ.} \quad (404)$$

Un cycle du moteur correspond à deux tours du vilebrequin. Il y a donc  $\nu = 4000/(2 \cdot 60) = 33,3$  cycles par seconde. La puissance du moteur est

$$P = -\nu W = 103 \text{ kW.} \quad (405)$$

13. La transformation  $B \rightarrow C$  n'est pas isochore. La combustion n'est pas instantanée, il y a intérêt à la faire en moyenne sous le volume minimum, donc à la commencer un peu avant la fin de la compression (c'est l'avance à l'allumage: l'étincelle a une avance sur le cycle).

La transformation  $D \rightarrow A$  n'est pas isochore. L'échappement n'est pas instantané, il faut du temps pour chasser les gaz brûlés; on les fait mieux sortir s'il y a une avance à l'échappement: la soupape d'échappement se lève en avance sur le cycle.



La transformation  $A \rightarrow M \rightarrow A$  n'est pas isobare. L'effet des pertes par viscosité dans les divers conduits est qu'à l'admission la pression dans le cylindre est constamment plus faible que la pression atmosphérique et, à l'échappement, constamment plus forte. Il en résulte que le cycle, dans le diagramme des  $P, V$ , a une petite boucle  $EMA$  d'aire négative vu son sens de parcours, qui peut retrancher quelques pour cent du travail utile ( $-W = \oint PdV = \text{aire algébrique du cycle}$ ).

Les transformations  $A \rightarrow B$  et  $C \rightarrow D$  ne sont pas isentropiques. Les parois, par conductibilité, font fuir la chaleur sans la laisser se transformer en travail dans le cylindre.

Il faut ajouter que la combustion du carburant peut être incomplète. La figure montre un diagramme réel qui tient compte de toutes ces circonstances.

14. Un moteur ditherme transformant l'intégralité de la chaleur qu'il reçoit de la part de la source chaude en travail mécanique est tel qu'il n'y a pas d'échange de chaleur avec la source froide ( $Q_2 = -(W + Q_1) = 0$ ). Un tel moteur est donc en réalité un moteur qui fonctionne sans différence de température et réalise un mouvement perpétuel de seconde espèce. Un tel moteur est impossible (c'est un énoncé du deuxième principe de la thermodynamique ; Yves Rocard, *Thermodynamique*, Masson (1952), page 12, attribue cet énoncé à Oswald que je n'ai pas pu identifier).

**1997 (non corrigé)**

# 1999 (incomplet)

## Partie A. Champs et interactions



L'énoncé de cette partie se trouve page [210](#).

### I. Forces centrales.

**1.a.** La force  $\vec{f}$  d'attraction exercée par  $m_1$  sur  $m_2$  est

$$\vec{f} = -\frac{Gm_1m_2\vec{u}}{r^2}. \quad (406)$$

**1.b.** Le champ gravitationnel  $\vec{g}(\vec{r})$  créé par une répartition de masse  $\rho(\vec{r})$  vérifie l'équation

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho(\vec{r}). \quad (407)$$

Le théorème de Gauss, appliqué à un volume  $V$  de bord  $\partial V$  exprime le flux sortant de  $\vec{g}$  à travers  $\partial V$  en fonction de la masse  $m$  à l'intérieur du volume  $V$  :

$$\int_{\partial V} \vec{g} \cdot \vec{n} \, dS = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{g} \, d^3r = \int_V -4\pi G\rho(\vec{r}) \, d^3r = -4\pi Gm. \quad (408)$$

Pour une répartition de masse à symétrie sphérique (pas nécessairement homogène) de centre  $M_1$ , le champ gravitationnel est de la forme  $\vec{g} = g(r)\vec{u}$ . Pour une boule  $V$  de rayon  $r$  contenant toute la masse  $m_1$ , l'équation (408) donne  $4\pi r^2 g(r) = -4\pi Gm_1$  puis  $g(r) = -Gm_1/r^2$ . La force de gravitation exercée par  $m_1$  sur  $m_2$  est donc la même que si toute la masse  $m_1$  était concentrée au point  $M_1$  :

$$\vec{f} = m_2\vec{g} = -\frac{Gm_1m_2\vec{u}}{r^2} \quad (409)$$

- 1.c. Dans un référentiel (non nécessairement galiléen) où la masse  $m_1$  est fixe, déplaçons la masse  $m_2$  du point  $A$  au point  $B$  en suivant un chemin  $\Gamma$ . Le travail  $W$  de la force  $\vec{f}$  au cours de ce déplacement est

$$W = \int_{\Gamma} \vec{f} \cdot \vec{dr} = \int_{\Gamma} -\frac{Gm_1m_2\vec{r} \cdot \vec{dr}}{r^3} = \int_{\Gamma} -\frac{Gm_1m_2rdr}{r^3} = \int_{\Gamma} Gm_1m_2d\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{Gm_1m_2}{r_B} - \frac{Gm_1m_2}{r_A}, \quad (410)$$

où  $r_A$  (resp.  $r_B$ ) désigne la distance  $M_1A$  (resp.  $M_1B$ ).

On a utilisé

$$r dr = d(r^2)/2 = d(\vec{r} \cdot \vec{r})/2 = \vec{r} \cdot d\vec{r} \quad (411)$$

pour écrire la troisième intégrale. Le travail  $W$  ne dépend pas du parcours suivi, mais seulement des points de départ  $A$  et d'arrivée  $B$ . Il s'exprime comme la diminution  $W = E_p(r_A) - E_p(r_B)$  (sa valeur initiale moins sa valeur finale) de l'énergie potentielle

$$E_p(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r}. \quad (412)$$

L'énergie potentielle n'est définie qu'à une constante additive près. L'expression (412) correspond à la convention que l'énergie potentielle s'annule lorsque les masses sont infiniment distantes.

**2.a.** Le centre d'inertie du système est défini en tant que moyenne pondérée par

$$\vec{OG} = \frac{m_1 \vec{OM}_1 + m_2 \vec{OM}_2}{m_1 + m_2}. \quad (413)$$

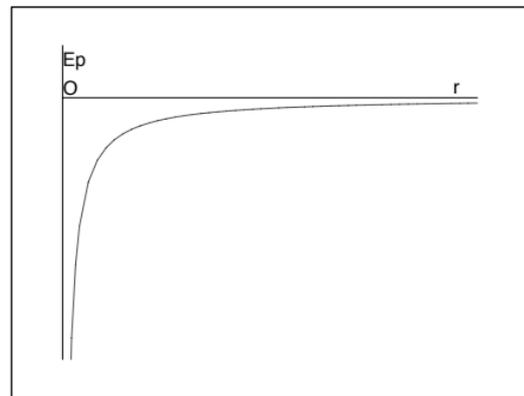


FIG. 1 – La fonction  $E_p(r)$  est croissante (attraction).

Le point  $G$  ainsi obtenu est indépendant de la position du point  $O$ . En effet, pour une autre origine  $O'$ , la définition (413) donne un point  $G'$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O'G'} &= \frac{m_1 \overrightarrow{O'M_1} + m_2 \overrightarrow{O'M_2}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 (\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OO'}) + m_2 (\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OO'})}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{m_1 \overrightarrow{OM_1} + m_2 \overrightarrow{OM_2}}{m_1 + m_2} - \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{O'G}\end{aligned}\quad (414)$$

qui est confondu avec  $G$ . En prenant le point  $O$  en  $G$  dans l'équation (413), on obtient la propriété du barycentre

$$m_1 \overrightarrow{GM_1} + m_2 \overrightarrow{GM_2} = 0 \quad (415)$$

qui peut aussi être utilisée pour définir le barycentre (il faut alors montrer qu'il existe un et un seul point qui vérifie l'équation (415)).

En prenant le point  $O$  en  $M_2$  dans l'équation (413), on obtient une relation utile dans la suite :

$$\overrightarrow{GM_2} = -\frac{m_1 \overrightarrow{M_2M_1}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \vec{r}}{m_1 + m_2}. \quad (416)$$

**2.b.** D'après la loi d'action et réaction (troisième loi de Newton<sup>39</sup>), la force agissant sur  $m_1$  est  $-\vec{f}$ . La loi

---

39. [Sir Isaac Newton \(1642-1727\)](#)

fondamentale de la dynamique (deuxième loi de Newton) donne, dans le référentiel  $R$ ,

$$m_1 \frac{d^2 \overrightarrow{OM_1}}{dt^2} = -\vec{f} \quad m_2 \frac{d^2 \overrightarrow{OM_2}}{dt^2} = \vec{f}. \quad (417)$$

En utilisant les équations (413) et (417), on obtient

$$\frac{d^2 \overrightarrow{OG}}{dt^2} = \frac{1}{m_1 + m_2} \left[ m_1 \frac{d^2 \overrightarrow{OM_1}}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \overrightarrow{OM_2}}{dt^2} \right] = \frac{1}{m_1 + m_2} \left[ -\vec{f} + \vec{f} \right] = 0. \quad (418)$$

Le mouvement du centre d'inertie du système dans le référentiel  $R$  est donc *rectiligne uniforme* (cette propriété se généralise à tout système isolé).

Le référentiel barycentrique  $R_G$ , défini comme étant le référentiel d'origine  $G$  et de base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ , est en mouvement uniforme par rapport au référentiel galiléen  $R$ . C'est donc également un référentiel galiléen.

**2.c.** En utilisant les équations (417), on a

$$m_1 m_2 \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m_1 m_2 \frac{d^2}{dt^2} \left( \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} \right) = m_1 \left[ m_2 \frac{d^2 \overrightarrow{OM_2}}{dt^2} \right] - m_2 \left[ m_1 \frac{d^2 \overrightarrow{OM_1}}{dt^2} \right] = (m_1 + m_2) \vec{f}. \quad (419)$$

On a donc, dans le référentiel  $R$ , en notant maintenant  $\vec{f}$  par  $\vec{f}_2$ ,

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{f}_2, \quad \text{où} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (420)$$

La grandeur  $\vec{r} = \overrightarrow{M_1M_2}$ , son accélération et la force  $\vec{f}_2$  étant inchangées dans toute transformation galiléenne, la relation (420) est également vraie dans  $R_G$ .

### 3.a. Comparons les moments cinétiques

$$\vec{\sigma}_N = \overrightarrow{NM_1} \wedge m_1 \vec{v}_1 + \overrightarrow{NM_2} \wedge m_2 \vec{v}_2 \quad \text{et} \quad \vec{\sigma}_{N'} = \overrightarrow{N'M_1} \wedge m_1 \vec{v}_1 + \overrightarrow{N'M_2} \wedge m_2 \vec{v}_2 \quad (421)$$

de l'ensemble du système par rapport aux points  $N$  et  $N'$  :

$$\vec{\sigma}_N - \vec{\sigma}_{N'} = \overrightarrow{NN'} \wedge m_1 \vec{v}_1 + \overrightarrow{NN'} \wedge m_2 \vec{v}_2 = \overrightarrow{NN'} \wedge (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) = \overrightarrow{NN'} \wedge \frac{d}{dt} (m_1 \overrightarrow{GM_1} + m_2 \overrightarrow{GM_2}) = 0,$$

où on a utilisé l'équation (415).

La valeur du moment cinétique est donc indépendante de la position du point  $N$ .

### 3.b. Calculons $\vec{\sigma}$ au point $M_1$ :

$$\vec{\sigma} = \overrightarrow{M_1M_2} \wedge m_2 \vec{v}_2 = \vec{r} \wedge m_2 \vec{v}_2. \quad (422)$$

D'après l'équation (416) :

$$\vec{v}_2 = \frac{d}{dt} \overrightarrow{GM_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{m_1 \vec{v}}{m_1 + m_2}. \quad (423)$$

En portant cette expression de  $\vec{v}_2$  dans l'équation (422) on arrive au résultat demandé :

$$\vec{\sigma} = \vec{r} \wedge m_2 \vec{v}_2 = \vec{r} \wedge \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \vec{v} = \mu \vec{r} \wedge \vec{v}. \quad (424)$$

### 3.c.

– D'après les équations (406) et (420)

$$\mu \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{Gm_1 m_2 \vec{r}}{r^3}. \quad (425)$$

On en déduit que la dérivée du moment cinétique par rapport au temps est

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \frac{d}{dt} (\mu \vec{r} \wedge \vec{v}) = \mu \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{v} + \vec{r} \wedge \mu \frac{d\vec{v}}{dt} = \mu \vec{v} \wedge \vec{v} - \frac{Gm_1 m_2}{r^3} \vec{r} \wedge \vec{r} = 0. \quad (426)$$

Le moment cinétique  $\vec{\sigma}$  est donc conservé. Cette propriété se généralise au moment cinétique d'un système isolé calculé dans un référentiel galiléen.

– Si  $\vec{\sigma} = \mu \vec{r} \wedge \vec{v}$  est non nul,  $\vec{r}$  est perpendiculaire à  $\vec{\sigma}$  et le point  $M$  se trouve dans le plan perpendiculaire à  $\vec{\sigma}$  passant par  $G$ .

Si  $\vec{\sigma} = \mu \vec{r} \wedge \vec{v} = 0$ ,  $\vec{r}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires. Comme  $r \neq 0$ , le mouvement a lieu sur une demi-droite issue de  $G$ . Ce résultat résulte de la conservation de  $\vec{u} = \vec{r}/r$ , qui peut se montrer par :

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{u}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{\vec{v}}{r} - \frac{\vec{r}}{r^2} \frac{dr}{dt} \\
 &= \frac{\vec{v}}{r} - \frac{\vec{r}}{r^3} \vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{v}}{r} - \frac{\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{v})}{r^3} \\
 &= \frac{\vec{v}}{r} - \frac{\vec{v}r^2}{r^3} = 0,
 \end{aligned} \tag{427}$$

où on a utilisé l'équation (411) dans la deuxième ligne et la colinéarité de  $\vec{r}$  et  $\vec{v}$  dans la troisième ligne.

3.d. En portant  $\vec{r} = r\vec{u}$  et

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u} + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad (428)$$

dans le moment cinétique, équation (424), on obtient :

$$\vec{\sigma} = \mu r \vec{u} \wedge (\dot{r}\vec{u} + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta) = \mu r^2 \dot{\theta} \vec{k} = \sigma \vec{k}, \quad (429)$$

où  $\vec{k}$  est le vecteur unitaire formant le trièdre orthonormé direct  $(\vec{u}, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ . Le moment cinétique étant constant,

$$C = r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{\sigma}{\mu} \quad (430)$$

est constant au cours du temps.

Pendant le temps  $dt$  le rayon vecteur  $\vec{r}$  balaie l'aire  $dS = r^2 d\theta/2$ . La vitesse aréolaire, qui est l'aire balayée par unité de temps par le rayon vecteur  $\vec{r}$ , est constante:  $\frac{dS}{dt} = \frac{C}{2}$ . Le nom de *constante des aires* donné à la grandeur  $\frac{C}{2}$  vient de cette propriété connue sous le nom de *loi des aires*.

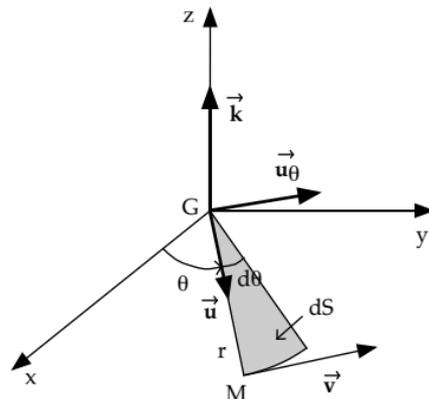


FIG. 2 – loi des aires

**3.e.** L'énergie cinétique  $E_c$  du système constitué par les deux objets est

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 \left( \frac{m_2\vec{v}}{m_1 + m_2} \right)^2 + \frac{1}{2}m_2 \left( \frac{m_1\vec{v}}{m_1 + m_2} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1m_2v^2}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{1}{2}\mu v^2 \end{aligned} \quad (431)$$

d'après l'équation (423) et une équation similaire pour  $\vec{v}_1$ . Elle est donc identique à celle d'un objet ponctuel de masse  $\mu$  et de vitesse  $\vec{v}$ .

En portant dans l'équation (431) l'expression en coordonnées polaires de  $\vec{v}$ , équation (428), on obtient :

$$E_c = \frac{1}{2}\mu \left[ \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right]. \quad (432)$$

D'après l'équation (430),  $\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2}$ . D'où

$$E_c = \frac{1}{2}\mu \left[ \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{C^2}{r^2} \right]. \quad (433)$$

**3.f.** En utilisant les équations (412) et (433), on obtient l'énergie mécanique du système,

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}\mu \left[ \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{C^2}{r^2} \right] - \frac{Gm_1m_2}{r}, \quad (434)$$

qui est une constante du mouvement.

**4.** La force électrostatique exercée par la charge  $Ze$  sur la charge  $2e$  est

$$\vec{F} = \frac{2Ze^2\vec{u}}{4\pi\epsilon_0r^2}. \quad (435)$$

Le rapport du module de la force de gravitation, équation (406) pour les masses  $M$  et  $m$ , et du module de la force électrostatique (435) est

$$\frac{f}{F} = \frac{4\pi\epsilon_0GMm}{2Ze^2} = 4,0 \cdot 10^{-36}. \quad (436)$$

La gravitation peut donc être négligée par rapport à la force électrostatique.

La force électrostatique est une force centrale en  $\frac{A}{r^2}$  comme la force gravitationnelle, la constante  $A$  valant  $\frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0}$  au lieu de  $-Gm_1m_2$ .

L'énergie mécanique du système est donc, par analogie avec l'équation (434),

$$E = \frac{1}{2}\mu \left[ \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{C^2}{r^2} \right] + \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (437)$$

## II. Application : Diffusion de Rutherford.

- La figure 3 donne le schéma de principe de la diffusion de particules  $\alpha$  lors de la traversée d'une feuille métallique très mince. On compte le nombre de particules  $\alpha$  diffusées dans l'angle solide  $d\Omega$ . On peut ainsi mesurer la section efficace angulaire  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  en fonction de la direction de diffusion.

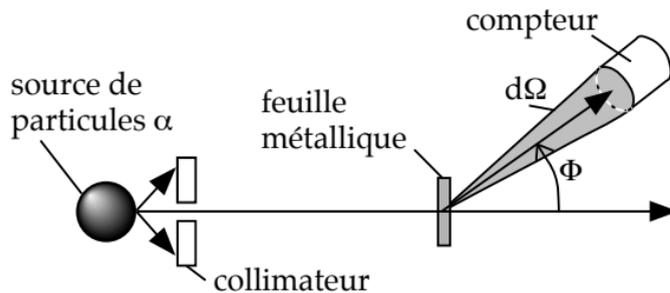


FIG. 3 – diffusion de particules  $\alpha$

Dans des expériences de 1906 à 1908, le Néo-Zélandais Rutherford<sup>40</sup>, puis l'Allemand Geiger<sup>41</sup> avait montré que les particules  $\alpha$  traversent divers matériaux (l'air, le mica, des feuilles minces de métal) en

40. Lord Ernest Rutherford (1871-1937)

41. Johannes (Hans) Wilhelm Geiger (1882-1945)

étant faiblement déviées (l'angle de déviation le plus probable étant de l'ordre de  $1^\circ$ ).

En 1909, à Manchester, dans l'équipe de Rutherford, Geiger et le Néo-Zélandais Marsden<sup>42</sup> étudièrent la diffusion d'un faisceau de particules  $\alpha$  par une feuille de métal. Ils réussirent à détecter la présence de particules  $\alpha$  déviées de plus de  $\pi/2$ .

A l'aide de feuilles de diverses épaisseurs ils prouvèrent que c'est un effet de volume et non une réflexion sur la surface de la feuille.

Dans l'expérience originale (figure 4), l'émetteur de particules  $\alpha$  (radium C, c'est à dire  $^{214}\text{Bi}$ ) est placé en  $A$  sur une plaque de plomb qui empêche les particules de frapper directement l'écran fluorescent (ZnS) en  $S$ . Quand rien n'est placé en  $R$  aucune particule arrive en  $S$ . Mais, quand une feuille de platine est placée en  $R$ , les scintillations dues aux particules  $\alpha$  frappant  $S$  sont observées avec le microscope  $M$ .

L'article original peut être consulté à l'adresse

<http://dbhs.wvusd.k12.ca.us/Chem-History/GM-1909.html>

Ces résultats ne peuvent être interprétés comme étant dus à la diffusion par des atomes de dimension de

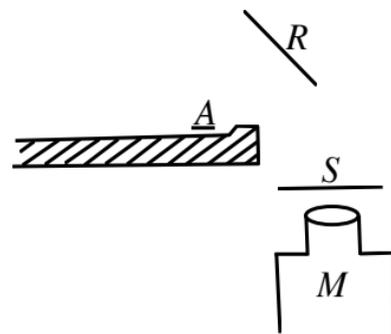


FIG. 4 – expérience de Geiger et Marsden (1909)

42. Sir Ernest Marsden (1889-1970)

l'ordre de  $a_0 = 10^{-10}$  m. La longueur d'onde de de Broglie des particules  $\alpha$  de vitesse  $v = 1,1 \cdot 10^7$  m s $^{-1}$  est  $\lambda = h/p \approx h/mv = 9,1 \cdot 10^{-15}$  m (cela n'était pas connu en 1909, bien sûr). L'angle typique de diffraction par un objet de  $a_0 = 10^{-10}$  m est donc de l'ordre de  $\lambda/a_0 \approx 10^{-4}$  rad.

En 1911, après de nombreuses hypothèses, Rutherford imagina un modèle de l'atome où toute la charge positive était concentrée en un noyau central. Il présenta un calcul de mécanique classique exprimant la distance minimale  $r_m$  entre le noyau et la particule alpha. Il obtint  $r_m \approx 3Z10^{-16}$  m, montrant que la diffusion des particules  $\alpha$  est due à un petit noyau très lourd et chargé positivement. La mesure de section efficace de diffusion permettait d'en déduire le nombre atomique  $Z$ , alors inconnu.

- 2.a.** La trajectoire de la particule  $\alpha$  est une branche d'hyperbole dont l'un des foyers est en  $G$ . Le noyau décrit aussi une branche d'hyperbole dont l'un des foyers est en  $G$ . Sur la figure, le noyau d'or est représenté lorsque la particule  $\alpha$  est en  $A$ , à la distance minimale d'approche  $r_m$  du noyau. A l'échelle de la figure, le noyau est alors confondu avec  $G$ . On remarquera que la trajectoire est symétrique par rapport à la droite  $GA$ .

2.b. Comme  $M \gg m$ ,

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{M} + \frac{1}{m} \approx \frac{1}{m} \quad (438)$$

et

$$\mu \approx m. \quad (439)$$

2.c. On tire de la relation donnée

$$b = \frac{a}{\tan \frac{\Phi}{2}}, \quad (440)$$

où

$$a = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 m v_0^2}. \quad (441)$$

Numériquement,  $a = 3,8 \cdot 10^{-12}$  m  
et  $b = 6,6 \cdot 10^{-12}$  m.

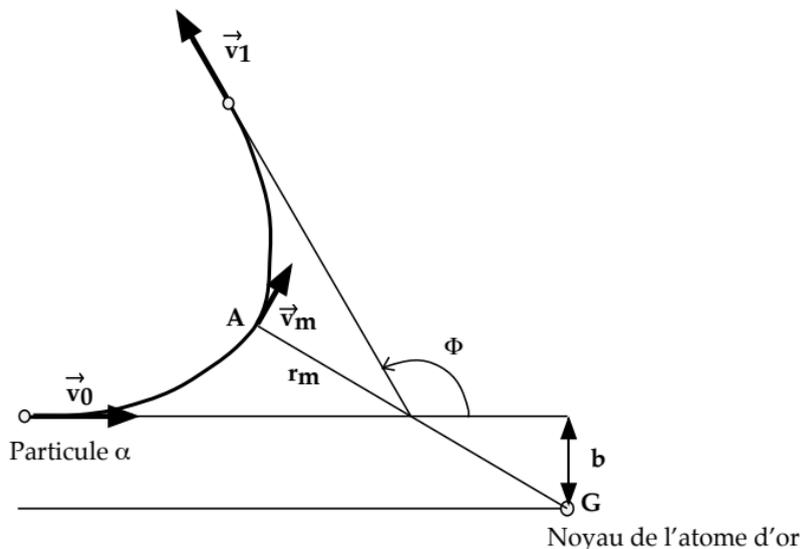


FIG. 5 – trajectoire d'une particule  $\alpha$

- 3.d.** Les lois de conservation de l'énergie et du moment cinétique du système suffisent pour déterminer la distance minimale d'approche  $r_m$ . Au temps  $t \rightarrow -\infty$ , la vitesse de la particule est  $\vec{v}_0$ , l'énergie mécanique du système se réduit à l'énergie cinétique de la particule  $\alpha$ ,

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2, \quad (442)$$

et le moment cinétique vaut en module  $|\sigma| = mv_0b$ . La constante des aires (430) est, au signe près,

$$|C| = \frac{|\sigma|}{m} = v_0b. \quad (443)$$

Le point  $A$  où la distance d'approche est minimale est aussi le point de rebroussement de la trajectoire où  $\frac{dr}{d\theta} = 0$ . L'énergie mécanique du système, équation (437), s'écrit en  $A$

$$E = \frac{1}{2}m \left[ \frac{C^2}{r_m^2} \right] + \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_m} = \frac{mv_0^2 b^2}{2r_m^2} + \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_m}. \quad (444)$$

Le rapport des expressions (444) et (442) de la grandeur conservée  $E$  donne une équation pour  $r_m$  :

$$1 = \frac{2}{mv_0^2} \left( \frac{mv_0^2 b^2}{2r_m^2} + \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_m} \right) = \frac{b^2}{r_m^2} + \frac{2a}{r_m} \quad (445)$$

où  $a$  est donné par (441). D'où, après multiplication par  $r_m^2$  :

$$r_m^2 - 2ar_m - b^2 = 0. \quad (446)$$

Des racines  $r_m = a \pm \sqrt{a^2 + b^2}$  de cette équation on ne garde que la racine positive, soit

$$r_m = a + \sqrt{a^2 + b^2} = 1,1 \cdot 10^{-11} \text{ m}. \quad (447)$$